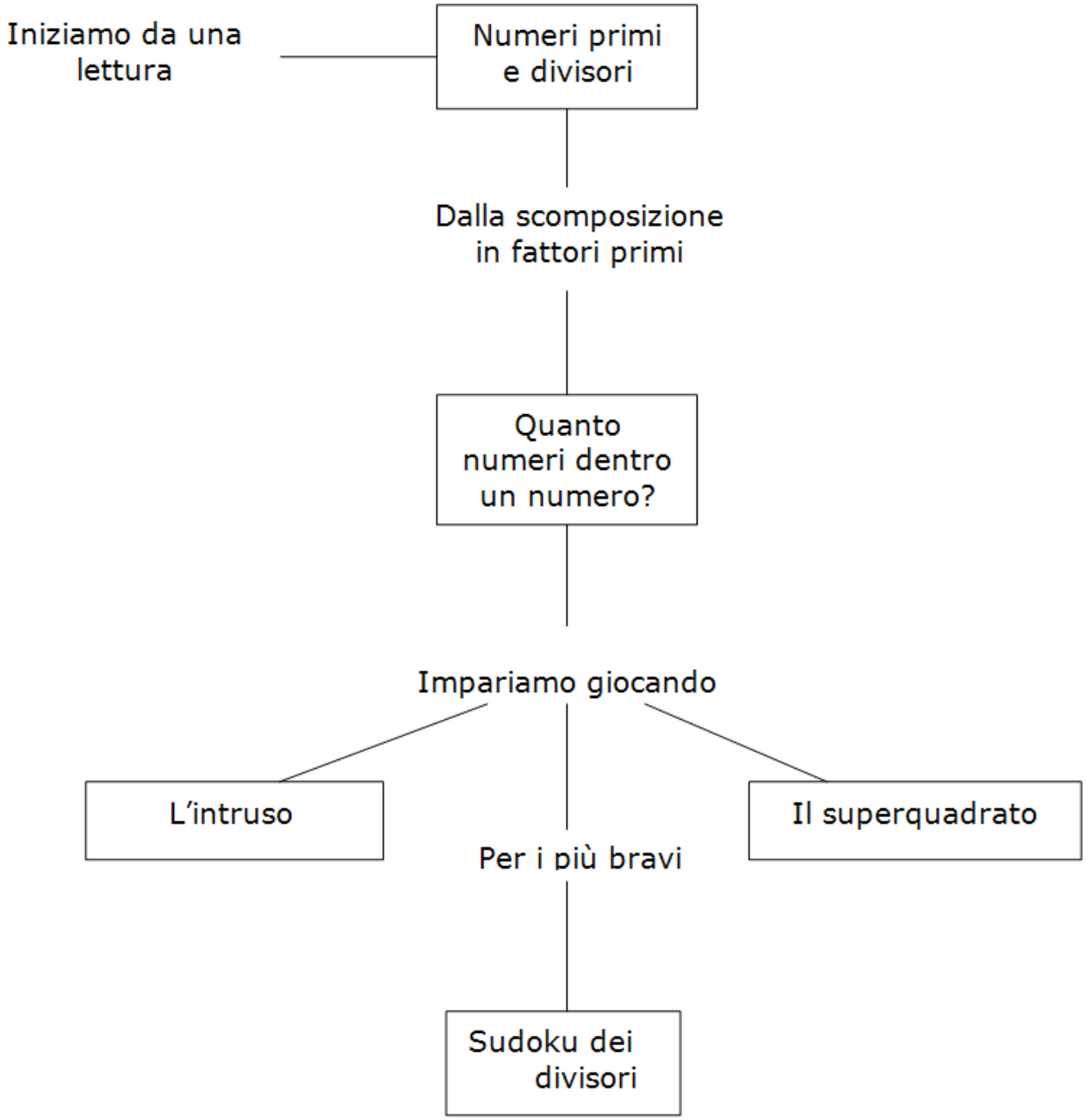
Primi, Scomposizione e Divisibilità

Giovanna Mayer

Nucleo: Numeri



FONDI STRUTTURALI EUROPEI PON 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Introduzione

Tematica: Si propongono attività e giochi per individuare nella scomposizione in fattori primi di un numero tutte le informazioni che essa contiene concentrando in particolare l'attenzione su quali e quanti siano i divisori del numero dato e quale risultato si ottenga dalla divisione tra il numero ed il suo divisore.

Finalità e obiettivi formativi: Nelle indicazioni Curricolare del 2007 vengono indicati, nell'ambito del tema Numeri, come obiettivi di apprendimento:

- individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri;
- scomporre numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione per diversi fini;
- utilizzare la notazione usuale per le potenze con esponente intero positivo, consapevoli del significato;
- usare le proprietà delle potenze anche per semplificare calcoli e notazioni.

Con le attività e i giochi che si propongono in questa unità si vuole sviluppare nei ragazzi l'abitudine a lavorare in modo consapevole con la scomposizione in fattori primi e nel contempo riuscire a rendere automatico , e corretto, il calcolo con prodotti e divisioni di numeri scomposti in fattori primi.

In particolare, riprendendo gli obiettivi sopra riportati, con questa unità si vuole sviluppare la capacità di scomporre numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione per:

- individuare multipli e divisori di un numero naturale;
- utilizzare la notazione usuale per le potenze con esponente intero positivo, consapevoli del significato;
- usare le proprietà delle potenze anche per semplificare calcoli e notazioni.

Metodologia: La lettura viene svolta con tutta la classe ma le attività che in essa sono proposte dovrebbero essere individuali o di coppia. La prima attività e i giochi proposti saranno una prima volta svolti in gruppo ma i giochi devono poi rimanere a disposizione degli alunni affinché li vivano come momento di distensione tra un'attività e l'altra o nei momenti di attesa. In ogni caso la metodologia è di tipo laboratoriale dove l'insegnante coordina l'attività, propone domande e guida gli alunni in difficoltà verso la soluzione.

Descrizione dell'attività

Alla scuola superiore, nel primo anno (ma continuano a sbagliare anche negli anni successivi), è frequente l'errore di semplificazione nella frazione $\frac{x^2}{2x}$, semplificano il 2 dell'esponente con il 2 del denominatore.

I ragazzi motivano la loro semplificazione dicendo che se sotto c'è scritto 2x significa che ho due volte la x e quindi, togliendo sia quel 2 che il 2 all'esponente, tolgo sia al numeratore che al denominatore una x. La loro difficoltà è legata alla confusione tra la struttura additiva e quella moltiplicativa: non vedono la differenza tra i "2" che semplificano.

In questa unità si vuole rafforzare la struttura moltiplicativa attraverso una riflessione su di essa, sviluppando consapevolezza del significato della scomposizione in fattori primi e della sua scrittura. Si cerca poi di avviare nei ragazzi delle "buone abitudini" attraverso giochi che si basino esclusivamente sulla scomposizione in fattori primi e su prodotti e divisioni di numeri scritti sotto forma di potenze. Se si raggiunge l'obiettivo di rendere automatica una divisione del tipo $(3^5 \times 5^2 \times 11) : (3^3 \times 5)$ i ragazzi, nel passaggio alla scuola secondaria di secondo grado, non dovrebbero aver problemi nella divisione $a^5 b^2 c : a^3 b$ analoga alla precedente.

L'unità prende il via con una lettura presa da "Il mago dei numeri", sviluppandosi poi attraverso un'attività sulla scomposizione in fattori primi:

1. Quanti numeri dentro un numero?

e dei giochi:

2. "L'intruso" gioco di carte, che devono essere predisposte dal docente, che sviluppa proprio l'abitudine a eseguire il tipo di divisione di cui sopra;
3. "Il superquadrato" che oltre a rafforzare quanto imparato permette di sviluppare osservazioni sulle regole delle potenze.

Nell'attività integrativa si propone un nuovo gioco, "Il sudoku dei divisori", che i ragazzi potranno eseguire nel momento in cui hanno preso più confidenza con quanto già visto.

Prerequisiti:

- I numeri primi
- Le potenze e le regole delle potenze
- La scomposizione in fattori primi

Nell'attività iniziale vengono ripresi sia i numeri primi, attraverso una lettura, che la scomposizione in fattori primi; la scrittura sotto forma di potenza si considera un prerequisito indispensabile mentre le regole delle potenze non sono mai esplicitamente richiamate ma non v'è dubbio che almeno nelle loro applicazioni più semplici queste siano necessarie.

Strumenti forniti agli allievi:

Per il gioco "L'intruso" devono essere predisposti dei mazzi di carte, seguendo le indicazioni della metascheda relativa, con diversi numeri scomposti in fattori primi. E' importante che i ragazzi non giochino sempre con lo stesso mazzo di carte altrimenti diventa solo un gioco ripetitivo e poco utile per raggiungere gli obiettivi proposti.

Per il gioco "Sudoku dei divisori" devono essere predisposti diverse coppie di quadrati, seguendo le indicazioni della metascheda relativa, così che i ragazzi possano averli a disposizione quando vogliano giocare.

Fasi e tempi:

Vengono qui indicati i tempi che si ritengono necessari:

- La lettura: 2 ore
- Quanti numeri dentro un numero?: 3 ore
- L'intruso: per giocarlo la prima volta 1/2 ora
- Il superquadrato:per giocarlo la prima volta 1 ora
- Sudoku dei divisori: per giocarlo la prima volta 1 ora

Scheda con indicazioni ai test Internazionali inerenti la tematica affrontata
(anche non necessariamente dello stesso livello scolastico)
Nella scheda allegata sono riportati quesiti tratti dalle indagini Invalsi e TIMMS

Attività 0

Indicazioni per il docente

Una lettura

Si propone di iniziare l'unità partendo dalla lettura di un capitolo del libro "Il mago dei numeri" di H.M. Enzensberger, edizioni Einaudi. Il capitolo che ci interessa è "La terza notte" e in esso il protagonista Roberto viene introdotto dal Mago dei numeri ai numeri primi, nel libro chiamati "numeri prìncipi".

Si riportano qui alcuni brani affinché si possa comprendere il perché di questa proposta:

" ...

- Dai, Roberto, alzati. Oggi tocca alle divisioni!"
- Non ne possiamo proprio fare a meno? Chiese Roberto.
- Avresti almeno potuto aspettare che mi addormentassi. E poi le divisioni non le reggo.
- Perché no?
- Ma perché quando si usa il più o il meno, o si moltiplica, i conti tornano sempre. Quando si divide invece no. Spesso c'è un qualche resto che mi dà un fastidio tremendo.
- La domanda che bisogna porsi è: quando succede?
- Succede cosa? Chiese Roberto.
- Quando succede che c'è un resto e quando non succede, spiegò il mago. E' questo il punto essenziale. A certi numeri glielo si legge in faccia che si possono dividere senza resto.
- Certo, disse Roberto. Con i numeri pari fila tutto liscio se si dividono per due. Non ci sono mai problemi! E' facile dividere anche i numeri della tabelline del tre:

  9 : 3

  15 : 3
- E via dicendo. E' come quando si moltiplica, solo al contrario:

  3 x 5 = 15

  Quindi

  15 : 3 = 5

..."

"...

- Va bene, disse Roberto, allora non dividiamo per zero. E con il 19 che ci faccio? Resta sempre un resto, che lo divida per 2, per 3, per 4, 5, 6, 7, o per 8.
- Se ti avvicini ti dico un segreto.

Roberto si chinò e i baffi del vecchio gli fecero solletico all'orecchio. Allora il mago gli sussurrò un segreto.

- Devi sapere che esistono quei banalissimi numeri che si possono dividere, e poi gli altri che invece non si può. Io preferisco questi. E sai perché? Perché sono dei prìncipi. I matematici ci si rompono la testa da più di mille anni. Sono numeri meravigliosi. L'undici ad esempio, o il tredici, ma anche il diciassette.

…"

Come si può notare la lettura permette di riprendere quanto i ragazzi conoscano sui numeri primi, sulle divisioni; proseguendo la lettura l'autore propone il "Crivello di Eratostene" per la ricerca dei numeri primi e introduce alcune proprietà dei numeri primi che sicuramente incuriosiscono i ragazzi.

Spesso quando leggiamo con la classe qualche brano chiediamo a qualcuno dei ragazzi di leggere. Non sempre però è una buona idea; il ragazzo che legge non conosce il testo e svolge quindi una lettura "piatta" e talvolta lenta, questo elimina molto il fascino di una lettura ad alta voce ed i ragazzi tendono a distrarsi non seguendo più quanto viene detto.

L'insegnante in fondo è "un attore" per natura e dovere; ad esempio quando vogliamo loro far capire in un espressione il ruolo delle parentesi non diciamo una frase del tipo " 2 + 3 x 5" usando le giuste pause per comunicare loro (2+3)x 5 ed evidenziando con pause diverse la differenza con 2 + (3x5)? Perché non accettare questo ruolo e leggere loro qualche brano o pagina di un libro? In questo caso il docente saprà fermarsi e fare le domande giuste affinché i ragazzi riflettano e possano confrontarsi fra loro su cosa siano i numeri primi, i divisori o quanti essi siano.

Il capitolo che si propone di leggere contiene domande a cui il lettore deve dare risposte, o propone attività di esplorazione con i numeri. Si potrà quindi sfruttare questi momenti per far lavorare i ragazzi in autonomia e poi farli confrontare sui risultati che sono stati ottenuti.

Il momento in cui i ragazzi espongono i loro risultati è un momento molto importante sia perché rende possibile sapere quanto abbiano compreso della lettura sia perché aiuta i ragazzi a creare un sapere condiviso, dei termini, un linguaggio specifico che verrà poi riutilizzato all'interno della classe.

Attività 1

Indicazioni per il docente

Quanti numeri dentro un numero?

Obiettivi:

- Rafforzare il concetto di divisore di un numero
- Sviluppare il calcolo mentale con numeri scomposti in fattori primi

L'attività proposta vuole sviluppare nei ragazzi la capacità di "vedere" nella scomposizione in fattori primi di un numero tutti i numeri che essa contiene. Non si tratta solo di riconoscere quali sono i divisori di un numero ma di individuare tutti i prodotti che è possibile sviluppare data una scomposizione e ad usare questa informazione per operare con essi.

Non è importante in questo momento che siano in grado di fare prodotti o divisioni complicate, si potrebbe quindi far usare la calcolatrice per controllare i calcoli che stanno facendo.

Gli esercizi devono essere svolti in gruppi così che si possano aiutare a vicenda nelle risposte. **Il docente non fornisce loro delle soluzioni ma li guida nell'interpretazione degli esercizi proposti.**

1. Questo esercizio serve a porre il problema "Ho un numero b, scomposto in fattori ma non so quanto vale. Come faccio a sapere se un numero a è divisore di b?" e non è importante che sia svolto correttamente.

   Negli esercizi successivi si risponde proprio a questa domanda.

   I ragazzi per rispondere alle prime due domande NON devono calcolare il numero dato, controllate che non lo calcolino. Nel caso non resistano alla tentazione di farlo (in fondo è naturale, chiediamo sempre loro di svolgere espressioni!) proponete loro un nuovo numero e stategli vicino mentre svolgono l'esercizio. Non correggeteli se sbagliano, nella domanda successiva possono controllare la risposta e chiedersi perché hanno sbagliato.

   L'esercizio si chiude in modo interlocutorio, si vuole dare qui spazio a chi ha capito quale possa essere il procedimento da seguire.

Inizia qui una riflessione sul procedimento della scomposizione in fattori primi; quando troviamo un divisore primo di un numero abbiamo due informazioni importanti, il numero primo che compone quel numero ed un nuovo divisore.

2. e 3. Si inizia a far riconoscere i due divisori ottenuti dopo il primo passo della scomposizione.

4. "So che c= 5^2 x 31 qual è il risultato della divisione di c per 5? …… Il numero che hai scritto è uguale a 5 x31? ……".

   Per rispondere i ragazzi avrebbero potuto calcolare c e dividerlo per 5, in tal caso la prima risposta è 155; la seconda domanda allora li obbliga a "vedere" 155 scritto come 5 x 31 e quindi a riflettere sul fatto che potevano evitare i calcoli fatti.

   Le due domande successive sono di rinforzo a quanto imparato.

Più la scomposizione in fattori va avanti più sono i numeri che i ragazzi devono individuare. Controllate che i divisori di 1400 individuati prima dell'esercizio 5 siano 2, 2^2, 2^3, 175, 350 e 700

5. E' un esercizio di applicazione, i divisori individuati dalla scomposizione in fattori sono dati, devono individuare il risultato della divisione. Non essendo proibito fare i calcoli per trovare divisori e risultati delle divisioni il suggerimento "Il risultato puoi scriverlo scomposto in fattori primi così da non fare calcoli" vuole spingerli a chiedersi "Come facevo a non fare i calcoli?". Ancora non diamo risposte, aspettiamo che le trovino.

Prima dell'esercizio successivo si chiede ai ragazzi di riconoscere, ancora in modo implicito, che vi sono nuovi divisori a cui forse non avevano pensato e che sono dati dalle possibili combinazioni dei fattori primi presenti nella scomposizione individuata.

6. Verifica che sia stato compreso che il divisore di un numero scomposto lo posso ottenere facendo una qualsiasi combinazione dei fattori primi presenti nella scomposizione.

7. Si chiede il risultato della divisione, ancora non è necessario rispondere senza eseguire prodotti e divisioni ma la scelta dei fattori inseriti è un incoraggiamento ad evitare i calcoli. Ci si aspetta che qualcuno cominci a capire come deve fare, qualora non accadesse non correggeteli.

Finita la scomposizione in fattori primi di 1400 i colori utilizzati per eseguire la scomposizione vengono ora utilizzati per trovare i divisori del numero.

Viene dato un metodo per individuare tutti i divisori del numero, ma non portato a termine completamente. I ragazzi dovrebbero rendersi conto che i divisori mancanti sono proprio quelli che escludono il primo fattore, utilizzato per trovare tutti gli altri, e i fattori ad esso identici. Quindi i divisori mancanti sono 5, 7, 5^2, 5^2x7.

8. Si chiede ai ragazzi di ripetere il procedimento seguito per determinare sia la scomposizione di 1400, eseguendo una "scomposizione in fattori a colori", che i suoi divisori. Si coglie anche l'occasione per ricordare loro che 1 è anch'esso un divisore (ma non è un numero primo). Ora è importante che abbiano compreso il metodo suggerito. La scelta di un numero del tipo a^2 x b^2 non è casuale, uno dei giochi proposti richiede proprio un numero così scomponibile.

Potrebbe essere utile fare tutti insieme altre "scomposizioni in fattori a colori", con il diagramma ad albero, e scrivere "a colori" i divisori.

I colori dei fattori inseriti nella scomposizione in fattori di 1400 risultano utili anche per comprendere come determinare il risultato della divisione. Visivamente la risposta è immediata.

Si introduce il termine di coppia di numeri complementari perché è utile per i giochi proposti successivamente.

9. E' un esercizio di applicazione per la ricerca dei numeri complementari.

"Scrivi che cosa hai imparato da questa attività". Quest'ultima parte è molto importante affinché gli studenti imparino a mettere a fuoco i concetti principali appresi. Se hanno già scritto troppo, si può anche farli parlare e da quello che emerge si può capire quanto l'attività svolta sia stata proficua o meno.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Quanti numeri dentro un numero?

1. Scomponendo il numero b in fattori primi si ha:

$$b = 2^3 \text{ x } 5^2 \text{ x } 7$$

Lo voglio dividere per 10, il risultato sarà un numero intero?

……

E se lo divido per 3 il risultato sarà un numero intero?

……

Controlla se hai risposto correttamente calcolando il numero b e svolgendo le divisioni.

Avevi risposto correttamente? ……

Se hai sbagliato pensi di sapere perché hai sbagliato?

……

……

Spiega quale errore hai commesso

……

……

……

C'è però un modo per dare la risposta giusta senza calcolare nessun numero.

Se pensi di sapere come si fa scrivi qui di seguito il procedimento:

……

……

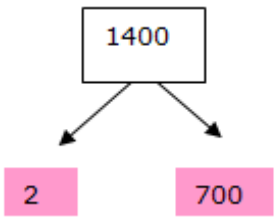
……

……

……

Proviamo insieme a capire bene cosa facciamo quando scomponiamo un numero in fattori primi.

Nel nostro caso il numero è 1400, vediamo che è pari e quindi lo dividiamo per 2, possiamo quindi scrivere:



Questo vuol dire che 1400 = 2 x 700 e che se divido 1400 per 2 ottengo un numero intero, 700.

2. So che c = 3 x 247 se divido c per 3 ottengo un numero intero? ……. Quale? ……

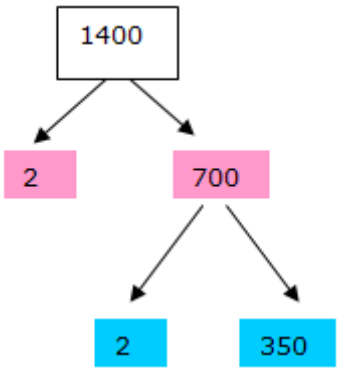
3. Nella prima riga della seguente tabella ti vengono proposti dei numeri scritti come prodotti. Si vuole sapere se sono divisibili per i numeri scritti nella prima colonna e, nel caso siano divisibili, quale sia il risultato della divisione.

Ad esempio il numero 3x247 è divisibile per 247 ed ottengo come risultato della divisione 3, quindi abbiamo scritto 3. Il numero 3x247 non è divisibile per 5 e nella tabella abbiamo scritto "no".

Completa la tabella

È divisibile per	**3x247**	**5x71**	**2x247**
247	3		
3	247		
5	no		
2	no		
71	no		

Riprendiamo la nostra scomposizione in fattori primi di 1400. Anche 700 è pari e lo divido per 2



Questo vuol dire che 1400 = 2 x 2 x 350 e che se divido 1400 per 2 ottengo ....., **ma questo lo sapevo già!!!**

Quali sono i nuovi numeri per cui è divisibile 1400? .....

Quando scriviamo che 1400= 2^2 x350 diciamo che 1400 è divisibile per 2, per 2^2 (ovvero per 4), per 350 e per 700 (ovvero per 2 x 350).

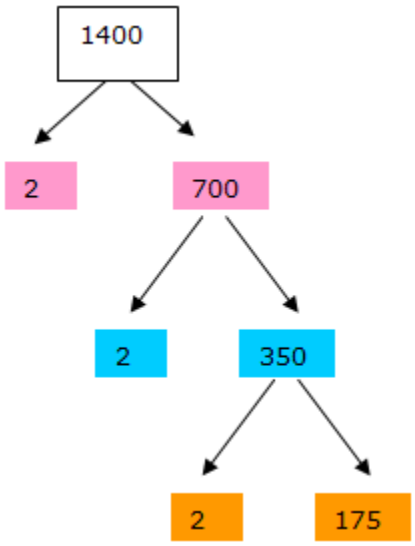
4. So che c= 5^2 x 31 qual è il risultato della divisione di c per 5? .....

   Il numero che hai scritto è uguale a 5x31? .....

   Se divido c per 5x31 cosa ottengo? .....

   Se divido c per 31 cosa ottengo? .....

La scomposizione in fattori primi di 1400 non è finita, continuiamo ad eseguirla. Il numero 350 è pari, dividiamo per 2 ed otteniamo:



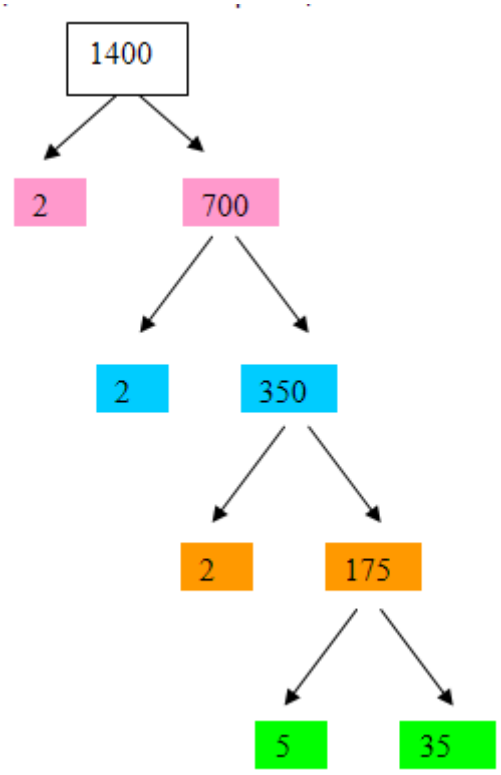
Questo vuol dire che 1400 = 2^2 x 2 x 175 = 2^3 x 175

Possiamo ora dire che **1400 è divisibile per 2, per 2^2, per …… , per …… , per ……. e per ……**

5. Il numero z è dato da $5^3 \times 7$, nella seguente tabella riporta il risultato della divisione tra z ed il numero scritto nella prima colonna. Il risultato puoi scriverlo scomposto in fattori primi così da non fare calcoli:

:	$5^3 \times 7$
5	
5^2	
5^3	
7	
5×7	
$5^2 \times 7$	

Continuiamo nella nostra scomposizione, 175 è divisibile per 5, ed avremo:



Quindi 1400 = 2^3 x ..... x .....

Possiamo ora dire che **1400 è divisibile per tutti numeri che abbiamo scritto nella pagina precedente ma anche per ……. e per …….**

Posso dire che 1400 è divisibile per 10? ……. Qual è il risultato di questa divisione scomposto in fattori primi? …….

Posso dividere 1400 per 40? ……. Qual è il risultato di questa divisione scomposto in fattori primi? …….

6. Il numero y è dato da **3^2 x 7 x 11** , nella seguente tabella segna con una X quali tra questi numeri sono suoi divisori.

3 x 7	2 x 7	3 x 11	7 x 11	3^3	3^2	7^2 x 11

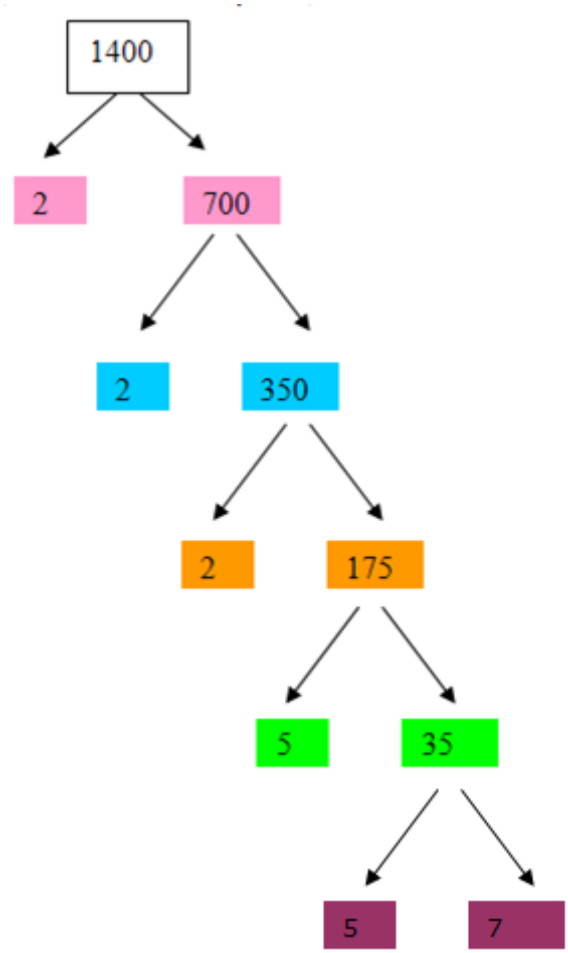
7. Il numero a è dato da **2 x 11^2 x 13^3** nella seguente tabella sono segnati alcuni suoi divisori scrivi, come nell'esempio, il risultato della divisione tra a ed il numero dato.

2 x 11	11^2 x 13	2 x 11^2	2 x 13^3	13^3	11^2	11^2 x 13^2
11 x 13^3						

I divisori del numero a sono stati scritti tutti? ……

Se ne manca qualcuno scrivilo qui: ……

Siamo finalmente giunti all'ultimo passaggio della scomposizione:

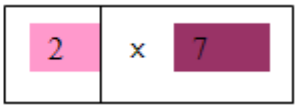


Quindi 1400 = 2^3 x …… x ……

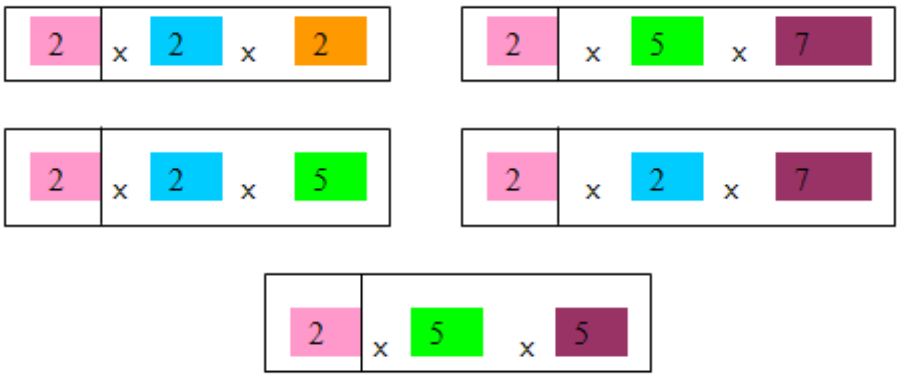
Per trovare tutti i divisori di 1400 ora conviene essere ordinati:

Cominciamo a prendere il primo fattore, è uno dei divisori:

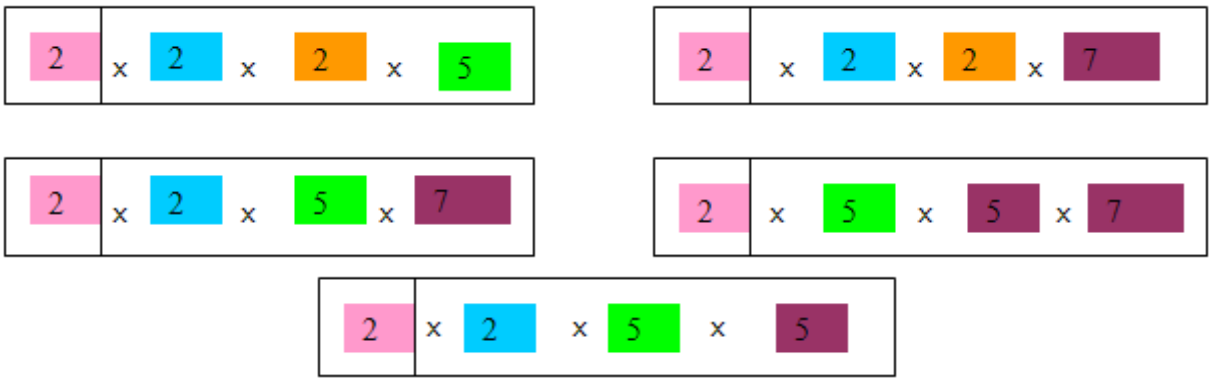
Moltiplichiamolo per tutti gli altri fattori primi, presi uno per volta,



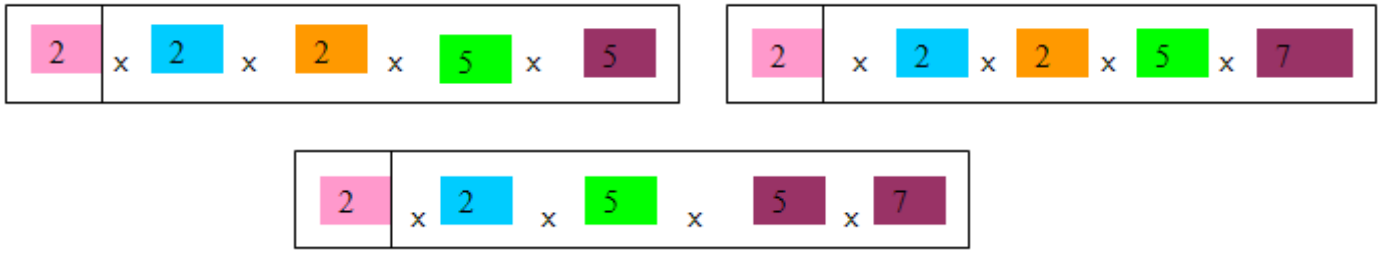
Ora moltiplichiamolo con due fattori alla volta:



Ora moltiplichiamo il primo fattore con altri tre fattori della scomposizione:



Possiamo moltiplicarlo anche con altri 4 fattori:



E moltiplicandolo per 5 fattori:

quest'ultimo è proprio il numero 1400 scomposto in fattori!

Abbiamo preso tutti i divisori? ……

Se secondo te ne manca qualcuno scrivilo qui:

……

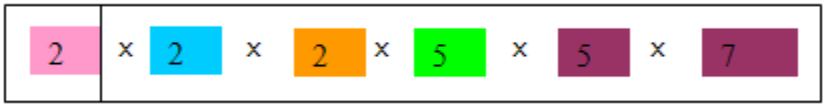
……

……

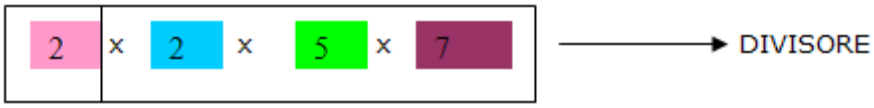
8. Usando matite colorate “scomponi in fattori primi a colori” il numero 1225 e determina tutti i suoi divisori:

Abbiamo trovato i divisori, come fare per trovare il risultato della divisione senza fare calcoli?

Abbiamo visto che il numero 1400 lo abbiamo scomposto come:



Lo vogliamo dividere per :



Quali sono i fattori che occorrono al secondo numero (il divisore) per formare 1400? .....

Il risultato allora sarà .....

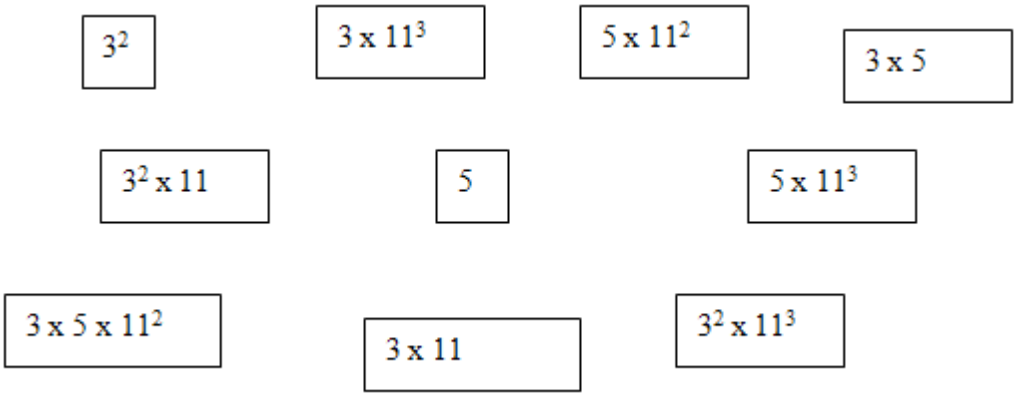
Abbiamo quindi trovato che se divido $2^3 \times 5^2 \times 7$ per $2^2 \times 5 \times 7$ ottengo .....

Chiameremo complementari i due numeri che moltiplicati tra loro danno il numero iniziale.

Ad esempio i numeri $2^3 \times 5$ e 5×7 sono complementari, rispetto a 1400, perché

$$(2^3 \times 5) \times (5 \times 7) = 2^3 \times 5^2 \times 7 = 1400$$

9. Il numero d è dato da $\mathbf{3^2 \times 5 \times 11^3}$. Qui di seguito sono proposti alcuni dei suoi divisori, cerca e unisci con una linea le coppie di numeri fra loro complementari. Se hai qualche difficoltà prova a scrivere i prodotti usando matite colorate per ogni fattore.



Scrivi che cosa hai imparato da questa attività

.....

.....

.....

.....

C'è qualcosa che non hai capito? (Barra una sola delle caselle)

☐ No, mi è tutto chiaro

☐ Sì, non ho capito ..... (scrivi quello che ancora non ti è chiaro).

.....

.....

.....

.....

Attività 2 - giocando

Indicazioni per il docente

Obiettivi:

- Rafforzare il concetto di divisore di un numero
- Sviluppare il calcolo mentale con numeri scomposti in fattori primi
- Rendere automatiche alcune operazioni con i numeri scomposti in fattori primi

In questa scheda si propongono alcuni giochi individuali, di coppia o di gruppo, il cui obiettivo è sviluppare nei ragazzi l'abitudine a lavorare con le potenze senza dover ogni volta ricostruirsi le regole di calcolo. Come le tabelline dovrebbero essere automatiche da una certa età in poi anche, data una scomposizione in fattori primi, l'individuazione dei divisori o il risultato di una divisione dovrebbe diventarlo. Se si riuscisse in questo intento nel passaggio al calcolo letterale si eviterebbero alcuni errori frequenti come ad esempio sbagliare le semplificazioni di frazioni algebriche.

Gioco di carte "L'intruso"

E' un gioco di gruppo, dello stile "uomo nero" (ogni regione ha un nome particolare per questo gioco). Si distribuiscono le carte ai giocatori e questi devono prima vedere se possono eliminare qualche carta secondo una data regola e poi far sceglier al compagno vicino (verso orario o antiorario dipende dagli usi) una carta delle proprie. Nel mazzo c'è una sola carta non accoppiabile e perde chi rimane in ultimo con quella carta in mano.

Scegliete un numero la cui scomposizione in fattori primi contenga un numero alto di divisori, ad esempio $4725 = 3^3x5^2x7$ che ha 24 divisori, compresi 1 e 4725. Preparate delle carte con scritti sopra tutti i divisori del numero. I divisori possono essere scritti alcuni come numero intero ed altri, i più complessi da scomporre a mente, già scomposti in fattori primi. Decidete quale carta possa essere l'intruso, ad esempio può essere un numero del tipo 3 x 11, ovvero un numero che contiene alcuni fattori della scomposizione ma è composto anche da altri numeri primi, quindi non è un divisore.

La regola per eliminare le carte a coppie è che le due carte siano complementari, ovvero il loro prodotto dia il numero scelto, 3^3x5^2x7.

Per poter iniziare il gioco i ragazzi dovranno prima scomporre il numero da voi dato e poi individuarne i divisori scomposti in fattori. E' una vostra scelta se far loro guardare l'elenco dei divisori, o ad esempio copiarlo alla lavagna, mentre si gioca. Potete anche far loro cercare prima le coppie complementari dall'elenco dei divisori e poi iniziare a giocare. In tal caso darei un tempo limitato per l'eliminazione delle coppie di carte, la richiesta di velocità è giustificata dalla ricerca precedente.

Qui di seguito sono predisposte le carte per il numero 4725 che possono essere stampate, ritagliate ed incollate su un cartoncino. Ovviamente potete renderle più carine scegliendo uno sfondo od incollandole su un cartoncino colorato. L'importante è che le carte siano tutte della stessa grandezza.

Se volete cambiare numero, di conseguenza divisori, sono tutte delle caselle di testo quindi facilmente modificabili. Le potenze sono scritte scegliendo "apice" in Carattere del menù di Formato, in questo modo risultano più facili da modificare. Se avete bisogno di più carte basta evidenziare una casella di testo, far copia ed incolla e poi modificarne il contenuto.

Affinché nessun ragazzo abbia più carte degli altri il numero dei ragazzi deve essere un sottomultiplo del numero dei divisori più l'intruso. Nel nostro caso è 5.

Carte:

3	$3^3 \times 5^2 \times 7$	1
9	27	15
21	$3 \times 5 \times 7$	3×5^2
$3^2 \times 5$	$3^2 \times 7$	$3^2 \times 5^2$

$3^2 \times 5^2 \times 7$	$3^2 \times 5 \times 7$	$3^3 \times 5$
$3^3 \times 7$	$3 \times 5^2 \times 7$	$3^3 \times 5^2$
$3^3 \times 5 \times 7$	5	5^2
5×7	$5^2 \times 7$	7

L'intruso:

$3 \times 5 \times 11$

Il superquadrato

Il gioco si può fare con numeri che abbiano 4 od 8 divisori quindi del tipo ab o ab^3

Obiettivo del gioco è scrivere i divisori del numero scelto all'interno di un quadrato seguendo due regole:

- **in modo che in ogni riga e in ogni colonna del quadrato compaiano gli 8 divisori del numero dato**
- **all'interno dei quadrati piccoli, posti in diagonale, due numeri che moltiplicati tra loro danno il numero stesso**

Ad esempio scelto il numero 54, che ha 8 divisori, all'interno dei quadrati piccoli si può scrivere:

1	2
27	54

9	18
3	6

Ma nel farlo occorre prestare attenzione alla prima regola data, ad esempio:

1	2	3	6	9	18	27	54
27	54	9	18	3	6	1	2
3	9						
6	18						
9	3						
18	6						
2	1						
54	27						

Il gioco non è così semplice come può sembrare, potete farli giocare una o due volte con numero e divisori scritti come numeri interi. Poi date loro un numero più complesso, ad esempio 6655 = 5 x 11^3, e seguendo la scheda dovranno scomporre il numero in fattori ed individuarne i divisori. Nella scheda si chiede di formare le coppie di divisori complementari, così da averle sotto gli occhi mentre si cerca di completare il " superquadrato".

Una soluzione possibile del gioco con il numero 54 = 2 x 3^3 è:

1	2	3	2 x 3	3^2	3^2x 2	3^3	2 x 3^3
3^3	2 x 3^3	3^2	3^2x 2	3	2 x 3	1	2
3	3^2	1	2	3^2x 2	3^3	3^3x 2	2 x 3
3 x 2	3^2x 2	3^3	2 x 3^3	2	3	3^2	1
3^2	3	2 x 3	1	3^3x 2	2	3^2x 2	3^3
3^2x 2	3 x 2	3^3x 2	3^2	3^3	1	2	3
2	1	3^2x 2	3^3	2 x 3	3^3x 2	3	3^2
2 x 3^3	3^3	2	3	1	3^2	2 x 3	3^2x 2

La tabella si presta ad ulteriori osservazioni:

- **In ogni riga ed in ogni colonna che numero ottengo se moltiplico tra loro tutti i numeri?**

  Poiché sono tutti i divisori di 54 e a coppie formano il numero 54, avendo 4 coppie, otterrò 54^4 ma loro lo leggono come:

  $$1x(2)x(3)x(2 \times 3)\ x(3^{2)}x(3^2x\ 2)x(3^3x2)\ x\ (3^3)$$

  Quali sono le regole delle potenze che mi permettono di scrivere questo numero come $(3^3x2)^4$?

- **Osservando alcune diagonali, quelle corrispondenti alle coppie di divisori complementari cosa si può osservare?**

1	2	3	2×3	3^2	$3^2 \times 2$	3^3	2×3^3
3^3	2×3^3	3^2	$3^2 \times 2$	3	2×3	1	2
3	3^2	1	2	$3^2 \times 2$	3^3	$3^3 \times 2$	2×3
3×2	$3^2 \times 2$	3^3	2×3^3	2	3	3^2	1
3^2	3	2×3	1	$3^3 \times 2$	2	$3^2 \times 2$	3^3
$3^2 \times 2$	3×2	$3^3 \times 2$	3^2	3^3	1	2	3
2	1	$3^2 \times 2$	3^3	2×3	$3^3 \times 2$	3	3^2
2×3^3	3^3	2	3	1	3^2	2×3	$3^2 \times 2$

Essendo le diagonali composte da coppie di divisori complementari avremo più volte il numero dato, $3^3 \times 2$. Nella prima diagonale, quella rossa, troviamo $3^3 \times 2$; nella diagonale verde, moltiplicando tutti i divisori avremo $(3^3 \times 2)^2$; nella diagonale blu so ottiene $(3^3 \times 2)^3$ ed in quella nera $(3^3 \times 2)^4$. Di nuovo uno spunto di riflessione sulle regole delle potenze.

Una volta compreso il gioco potreste lasciare a disposizione dei ragazzi dei fogli con dei superquadrati vuoti e sopra l'indicazione del numero con cui effettuare il gioco. Può diventare un passatempo da svolgere in attesa che qualcuno della classe finisca una consegna o che tutti i compagni arrivino in classe o …

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

L' intruso

1. **Scomponi in fattori primi il numero che ti dà la tua insegnante:**

2. Scrivi nelle caselle sottostanti tutti i divisori, scomposti in fattori primi, del numero che hai scomposto. Ricorda di essere ordinato altrimenti rischi di perderti qualche divisore.

3. L' insegnante vi darà delle carte e vi spiegherà le regole del gioco, la tabella scritta sopra potrebbe esservi utile.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Il superquadrato

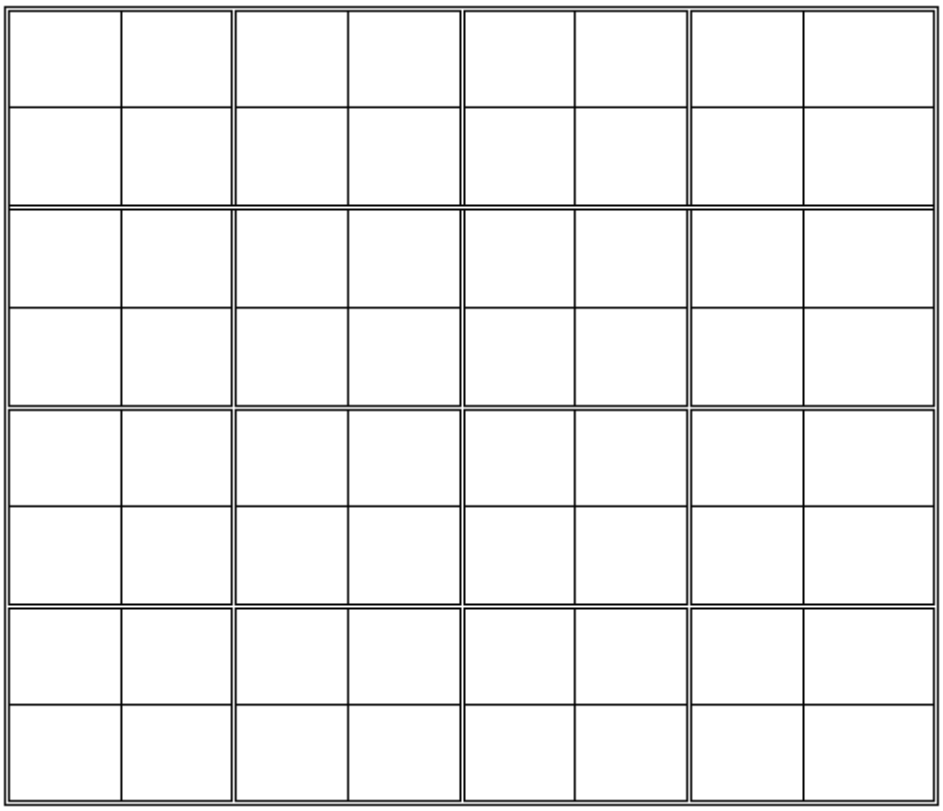
4. **Scomponi in fattori primi il numero che ti dà la tua insegnante:**

5. **Scrivi nelle caselle sottostanti tutti i divisori, scomposti in fattori primi, del numero che hai scomposto.**

6. **Individua le coppie complementari di divisori, ricorda il loro prodotto deve essere uguale al numero che hai scomposto, e riportale qui di seguito:**

7. **Qui di seguito è riportato un "Superquadrato", riempilo seguendo queste due regole:**

   - **in ogni riga e in ogni colonna del quadrato vi devono essere gli 8 divisori del numero dato**
   - **all'interno dei quadrati piccoli devi scrivere due coppie di divisori complementari ponendo in diagonale le coppie stesse.**



Attività integrative

Indicazioni per il docente

Sudoku dei divisori

Il gioco è equivalente al sudoku classico solo che i 9 numeri da scrivere all'interno del quadrato sono i divisori di un numero dato. Affinché i divisori siano 9 il numero deve essere del tipo a^2b^2.

Il numero dovrà essere scomposto in fattori primi e i suoi divisori individuati attraverso la scomposizione e scritti ancora scomposti in fattori primi.

Ai ragazzi si daranno due quadrati, uno è quello da completare e contiene già alcuni numeri del gioco inseriti, l'altro invece contiene in caselle diverse i divisori complementari ai divisori da scrivere in quello da completare. Chiameremo il secondo "quadrato complementare".

La presenza dei due quadrati permette ai ragazzi di scoprire attraverso le coppie complementari di divisori nuovi numeri da inserire nel sudoku e renderà più semplice completarlo.

Un sudoku non si può costruire a caso ma, per fortuna, esiste un sito http://utenti.quipo.it/base5/jssodoku/sudokusolver.htm che inserendo i "suggerimenti" da mettere nel sudoku vi dice se esiste la soluzione o vi dice quali numeri cambiare nella vostra richiesta. La soluzione è poi proposta poco più sotto nella stessa pagina. Ovviamente il sudoku nel sito è costruito con i numeri da 1 a 9 ma basterà stabilire una corrispondenza tra questi numeri ed i divisori per trasformarlo in un "sudoku dei divisori".

Ad esempio prendiamo il numero 23^2x59^2:

- Per prima cosa individuiamo i suoi divisori: 1,23, 23^2, 23 x 59, 23^2x59, 59, 59^2 , $23x59^2$ e 23^2x59^2
- Associamo i numeri da 1 a 9 ai divisori trovati:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	23	59	23^2	23 x 59	23^2x59	$23x59^2$	23^2x59^2	59^2

- Andiamo sul sito e chiediamo un sudoku con un certo numero di suggerimenti; conviene aumentare poi questo numero aiutandosi con la soluzione che possiamo visualizzare.

- Attraverso la corrispondenza sopra stabilita costruiamo il sudoku da giocare, ad esempio:

		59^2	23			23^2x59		
	23				59^2		59	
23^2x59^2		$23x59^2$		23^2				59^2
	1						23 x 59	
23^2		59						
23 x 59					23			
23	59^2	23^2						1
59				23^2x59^2		23		
			23^2		1			59

- Sempre aiutandosi con la soluzione visualizzata costruiamo il “quadrato complementare”

23^2x59^2					1			23 x 59
		23 x 59		23		59^2		
	23^2x59		23 x 59				$23 x59^2$	
23^2		$23 x59^2$		59	59^2			
	23			23^2x59^2		23^2	59	$23x59^2$
			23			23^2x59		59^2
			59	23 x 59		23		
	23 x 59		23^2				59^2	59
23		59				23 x 59	23^2	

- I ragazzi dal "quadrato complementare" avranno ulteriori suggerimenti e quindi il sudoku da completare sarà:

1		59^2	23		23^2x59^2	23^2x59		23 x 59
	23	23 x 59		$23x59^2$	59^2	23^2	59	
23^2x59^2	59	$23x59^2$	23 x 59	23^2			23	59^2
59^2	1	23		23^2x59	23^2		23 x 59	
23^2	$23x59^2$	59		1		59^2	23^2x59	23
23 x 59			$23x59^2$		23	59		23^2
23	59^2	23^2	23^2x59	23 x 59		$23x59^2$		1
59	23 x 59		59^2	23^2x59^2		23	23^2	23^2x59
$23x59^2$		23^2x59^2	23^2		1	23 x 59	59^2	59

Nel quadrato evidenziato manca solo un numero e quindi la soluzione da parte dei ragazzi prende facilmente il via.

La scheda per i ragazzi spiega il gioco attraverso un esempio analogo a quello qui inserito ma sviluppato con il numero 36.

Di seguito riportiamo le due schede da completare con i numeri da voi individuati e da dare ai ragazzi per farli giocare.

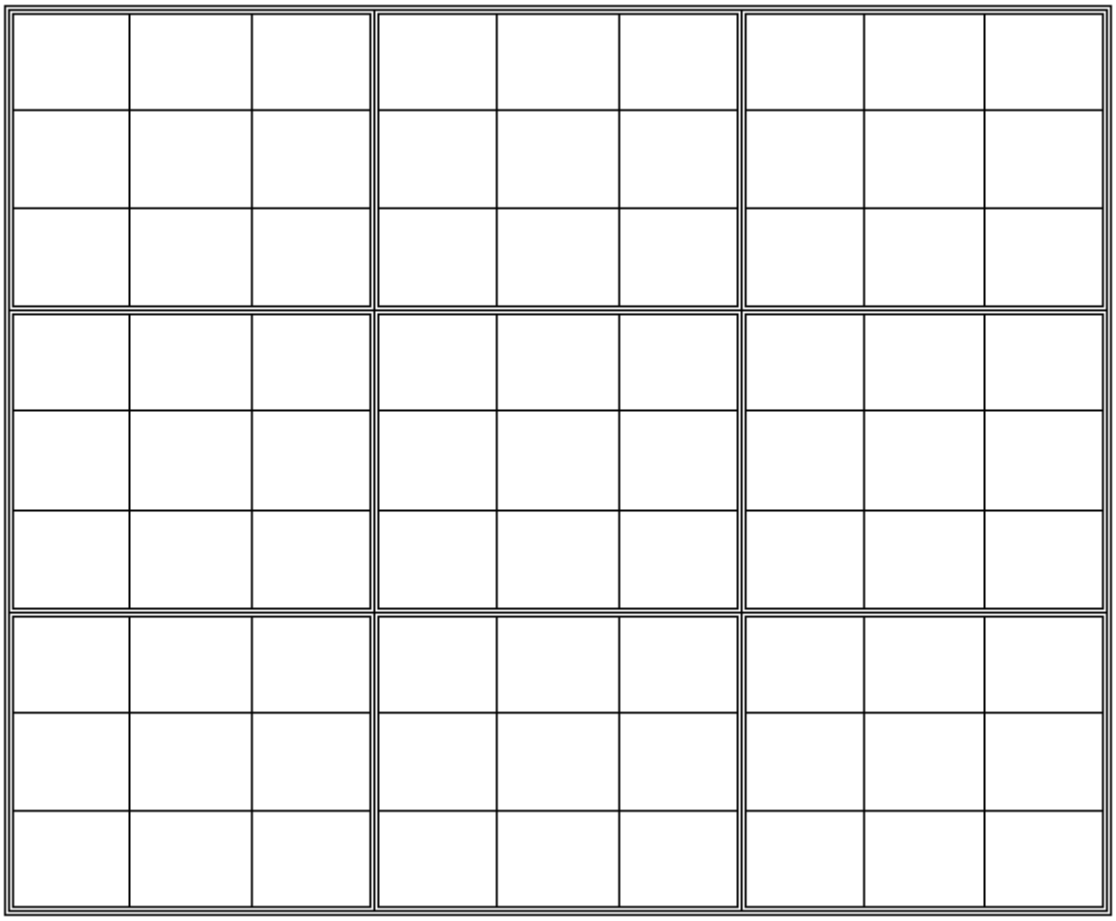
Sudoku dei divisori di ……..

- Scomponi in fattori primi il numero ……

- Trova tutti i suoi divisori e scrivili scomposti in fattori primi:

- Questo è il sudoku da completare:

- Questo è il quadrato complementare:

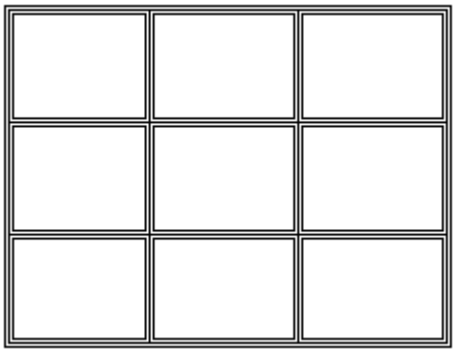


Buon divertimento!

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Sudoku dei divisori

Probabilmente conosci già il sudoku, bisogna completare un quadrato come quello qui disegnato inserendo 9 numeri in modo che in ogni riga, in ogni colonna ed in ognuno dei 9 quadrati interni siano presenti tutti i 9 numeri. Normalmente nei sudoku vengono già inseriti alcuni di questi numeri così da avviare verso la soluzione il giocatore.



Le particolarità del gioco che ti proponiamo sono due:

1. i numeri da inserire sono i divisori di un numero che ti dirà l'insegnante quando ti darà il sudoku da completare;
2. insieme al quadrato da completare ti verrà dato un "quadrato complementare", in esso saranno inseriti i divisori "complementari" a quelli che devi scrivere nel sudoku.

Ad esempio, il numero che ti dà l'insegnante è 36

- Scomponi 36 in fattori primi e scrivi i suoi divisori:

……

- L'insegnante ti propone questo sudoku da completare, in cui sono inseriti alcuni dei 9 divisori:

2^2x3^2					1			2 x 3
		2 x 3		2		3^2		
	2^2x3		2 x 3				$2x3^2$	
2^2		$2x3^2$		3	3^2			
	2			2^2x3^2		2^2	3	$2x3^2$
			2			2^2x3		3^2
			3	2 x 3		2		
	2 x 3		2^2				3^2	3
2		3				2 x 3	2^2	

- Insieme al sudoku da completare avrai anche questo "quadrato complementare" in cui sono inseriti i divisori complementari di quelli da inserire nel sudoku:

		3^2	2			2^2x3		
	2				3^2		3	
2^2x3^2		$2x3^2$		2^2				3^2
	1						2 x 3	
2^2		3						
2 x 3					2			
2	3^2	2^2						1
3				2^2x3^2		2		
			2^2		1			3

Ad esempio nella casella con lo sfondo colorato è scritto 3^2 che, rispetto al numero 2^2x3^2, è il divisore complementare di 2^2. Nel sudoku che devi completare scriverai nella stessa casella il numero 2^2. Facendo lo stesso per tutti i numeri riportati nel quadrato complementare il tuo sudoku diventa più facile da finire.

Per ultimo divertiti a completare il sudoku!

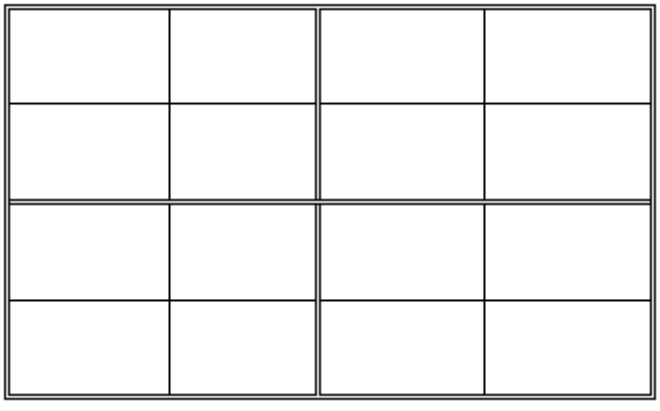
Attività di rinforzo

In questo modulo non si propone un'attività specifica di recupero perché i giochi proposti, se svolti con numeri semplici, costituiscono già una base per il recupero.

Un gioco che potrebbe essere fatto a coppie, e quindi coinvolgendo solo chi ha più difficoltà, con lo stesso mazzo di carte del gioco dell'intruso è:

- Si distribuiscono tutte le carte fra i due giocatori
- Ogni giocatore elimina le coppie complementari, quindi diminuiscono molto le carte che si hanno in mano.
- Il primo giocatore mette una carta sul tavolo
- Il secondo giocatore deve rispondere con la sua complementare (che ha per forza).
    - Se non sa rispondere perde.
    - Se risponde prende la coppia di carte e poi tocca a lui mettere una carta sul tavolo.
- Si continua così finchè uno dei giocatori rimane con una sola carta (l'intruso) e perde.

Il gioco del superquadrato si può fare anche con numeri del tipo ab che hanno quattro divisori (1,a,b,ab). Ovviamente in questo caso è molto semplice ma si possono scegliere numeri in cui un divisore sia semplice (2,3,5) e l'altro complesso così da esercitarli nel riconoscere quando un numero è divisibile per questi tre numeri. Il quadrato da completare sarà del tipo:

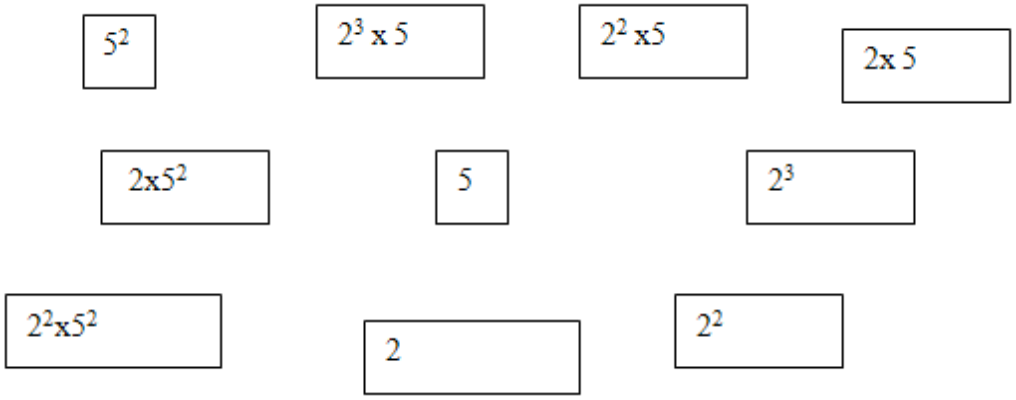


Il sudoku dei divisori potrebbe esser costruito da un ragazzo e risolto da un suo compagno. Se si usano numeri come 100 o 225 e si suggerisce loro quante caselle riempire su ciascuna delle due tavole affinchè il compagno possa completarlo diventa un esercizio adatto al recupero.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Verifica

1. Il numero d è dato da $2^3 x 5^2$. Qui di seguito sono proposti alcuni dei suoi divisori, cerca e unisci con una linea le coppie di numeri fra loro complementari.



2. In quale dei seguenti prodotti il risultato è $3^3 x 5 x 19$:
   a. $(3x5)x(3^2 x19)$
   b. $(3x5)x(3x19)$
   c. $(3^2 x5)x(19)$
   d. $(5x19)x(3^2)$

3. Quale di seguenti numeri è il risultato della divisone tra $7^2 x11x17^3$ e $7x11x17$:
   a. $7x17$
   b. 17^2
   c. $7x17^2$
   d. 7

4. Quale dei seguenti numeri **non** è un divisore di $2x3^2x13$:

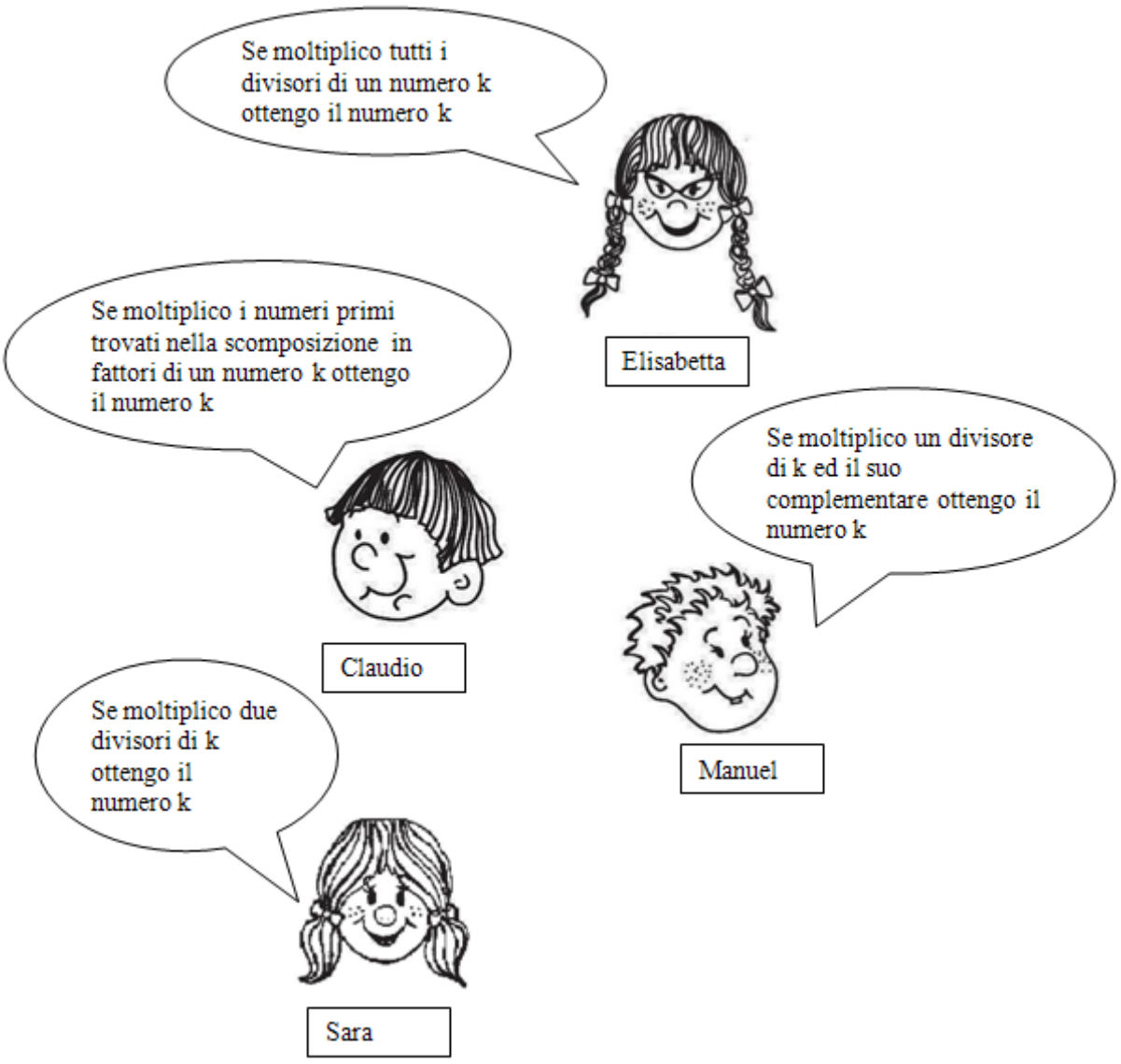
   a. $2x3^2$

   b. $2x3^3$

   c. 3^2x13

   d. $2x13$

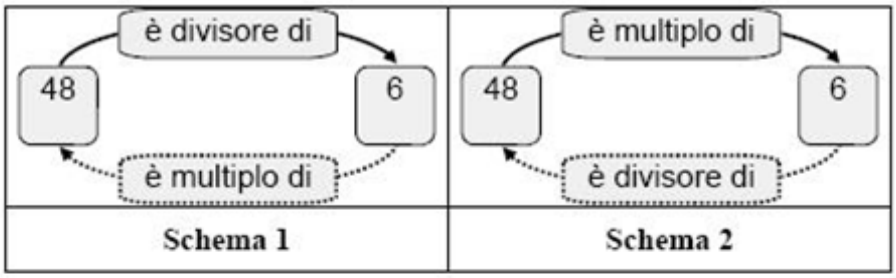
5.

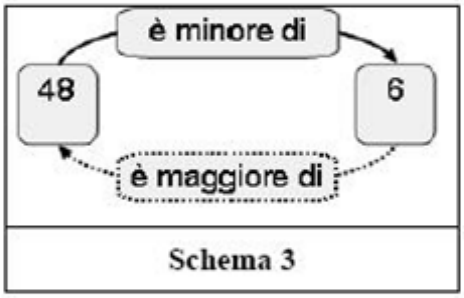


Chi sta facendo un affermazione corretta?

Alcuni esempi da test nazionali ed internazionali

INVALSI V ELEMENTARE 2008-2009





☐ A. Nello schema 1.

☐ B. Nello schema 2.

☐ C. Nello schema 3.

☐ D. In tutti e 3.

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

INVALSI I MEDIA 2009-2010

D11. Considera il seguente prodotto:

$$2 \times 5 \times 29 \times 101$$

Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

		Vero	Falso
a.	Il risultato è un numero divisibile per 3	☐	☐
b.	Il risultato è un numero divisibile per 58	☐	☐
c.	Il risultato è un numero divisibile per 10	☐	☐
d.	Il risultato è un numero divisibile per 6	☐	☐

D15. A quale valore corrisponde il risultato della seguente operazione?

$$2^3 + 2^6$$

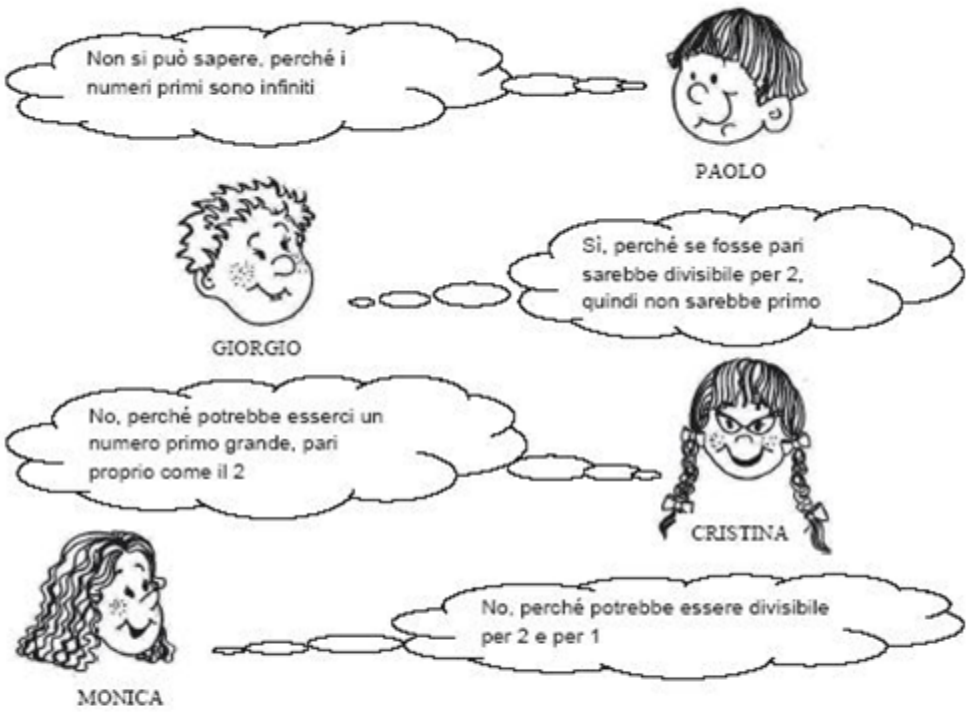
☐ A. 512

☐ B. 2^9

☐ C. 72

☐ D. 2^{18}

D20. **L'insegnante chiede: "Un numero primo maggiore di 2 è sempre dispari?". Quattro studenti rispondono così:**



Chi ha ragione?

- ☐ A. Paolo
- ☐ B. Giorgio
- ☐ C. Cristina
- ☐ D. Monica

D28. **Se sulla tastiera di una calcolatrice tascabile digito**

3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3

ciò corrisponde a:

- ☐ A. 24
- ☐ B. 3^8
- ☐ C. 8^3
- ☐ D. 243

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

TIMMS III MEDIA

M04_02

17 Quale tra le seguenti espressioni mostra 1.080 come prodotto di fattori primi?

(A) $1.080 = 8 \times 27 \times 5$

(B) $1.080 = 2 \times 4 \times 3 \times 9 \times 5$

(C) $1.080 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

(D) $1.080 = 2^2 \times 3^2 \times 6 \times 5$

M07_01

44 In una gita il numero di bambini è superiore a 55, ma inferiore a 65.

Si possono dividere i bambini in gruppi di 7, ma non in gruppi di 8. Quanti bambini partecipano alla gita?

Risposta: _____