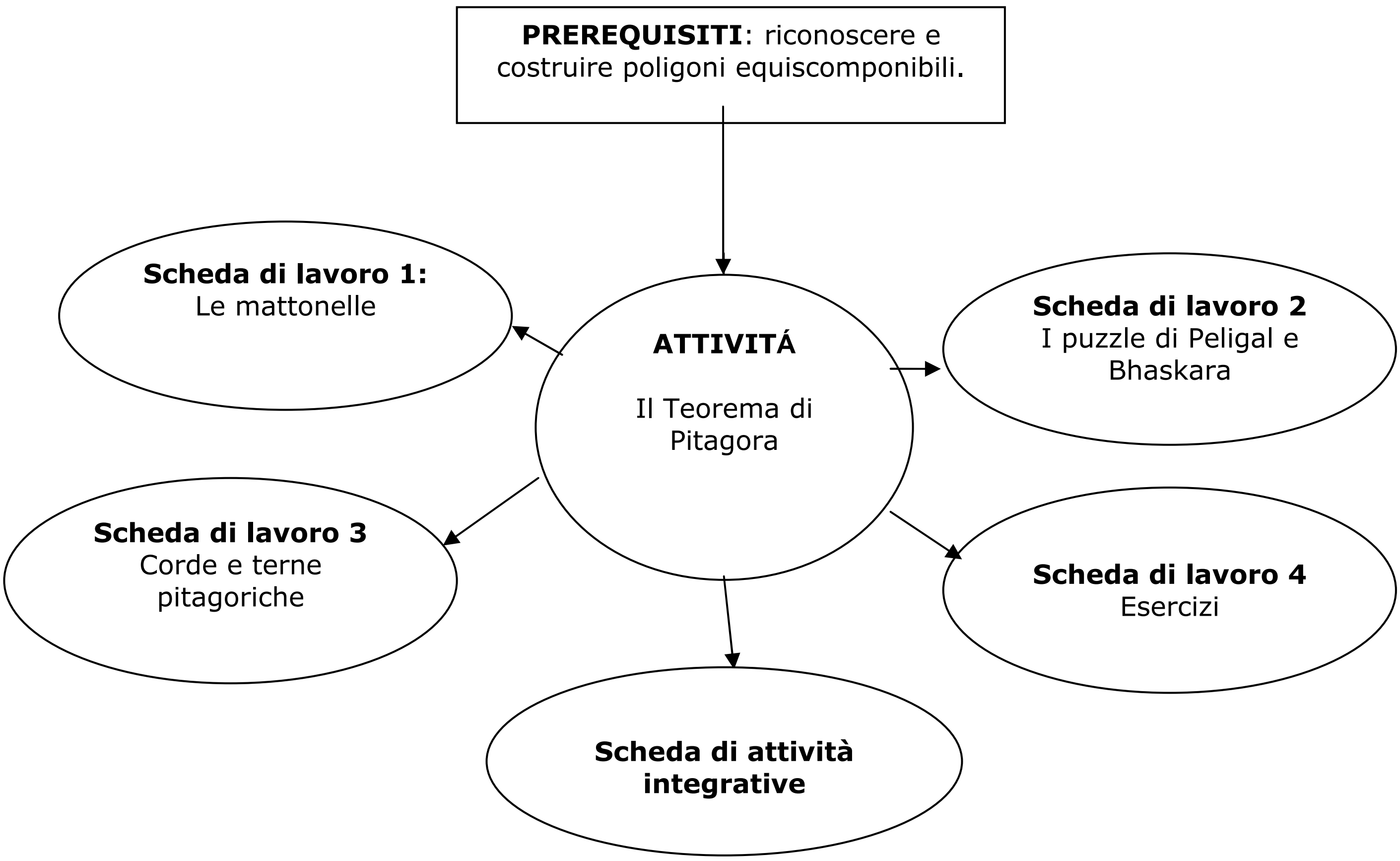
PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011

Una scuola di qualità, per tutti

Titolo: Il Teorema di Pitagora

Palmira Ronchi

Nucleo: Spazio e forme



PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Introduzione

Tematica: l'attività, attraverso un approccio storico-genetico al teorema di Pitagora, ripercorre alcune tra le più semplici e intuitive dimostrazioni del teorema, sviluppatesi nel corso dei secoli, sia da parte dei Pitagorici che di vari autori; in un contesto manipolativo e di gioco, con l'uso di schede su cui sviluppare le costruzioni geometriche o di software di geometria dinamica.

Finalità e obiettivi di apprendimento

Obiettivi dalle Indicazioni Nazionali 2007:

- *conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete.*
- *riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria).*
- *descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.*
- *riprodurre figure e disegni geometrici in base a una descrizione e codificazione fatta da altri.*

Obiettivi specifici della attività riguardano:

- produrre figure e disegni geometrici riguardanti le dimostrazioni del teorema di Pitagora;
- acquisire un *linguaggio geometrico* preciso atto a comunicare e condividere le proprie soluzioni;
- manipolare figure geometriche con l'uso di software di geometria dinamica per un uso parallelo da parte degli allievi dei registri analitico-formale e sintetico visivo.

Metodologia: attività di tipo laboratoriale da svolgere in piccoli gruppi, dove l'insegnante guida l'esplorazione delle costruzioni geometriche da parte degli allievi, valorizza le ipotesi, coordina la discussione e la verifica, ponendo domande stimolo e problemi. Le risposte non vengono date dall'insegnante, ma scoperte dagli alunni attraverso la costruzione, la manipolazione di modelli geometrici, l'uso di software di geometria dinamica, la verbalizzazione e la discussione in classe.

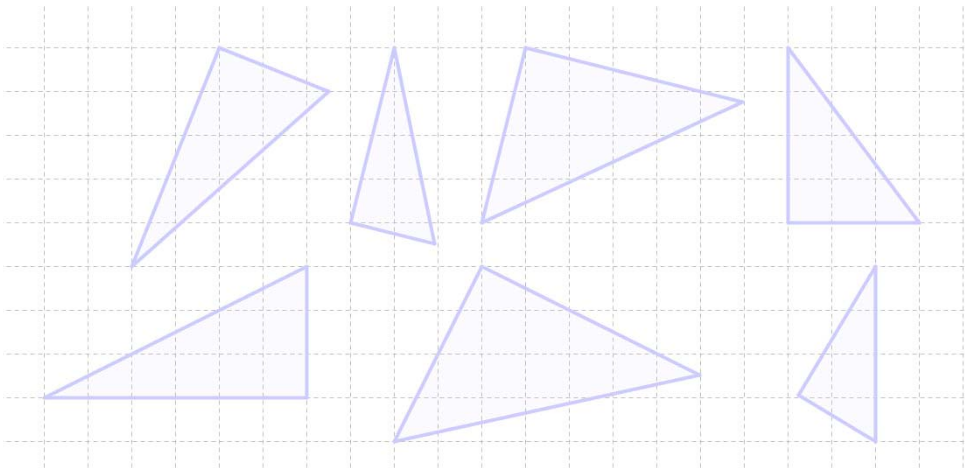
Attività 1 – Le mattonelle
Indicazioni per il docente

Tipologia: attività laboratoriale con costruzione di modelli in carta di triangoli, rettangoli e quadrati da comporre tra loro alla ricerca della proprietà fondamentale scoperta da Pitagora

Obiettivo didattico: lo scopo di questa attività è di far costruire modelli geometrici e visualizzare concretamente le proprietà scoperta da Pitagora, utilizzando un approccio storico genetico al tema, che mira non solo a far comprendere agli allievi il rilievo storico dell'argomento trattato, ma si ispira a un'ipotesi di sperimentazione didattica secondo la quale l'ontogenesi cognitiva ricapitola la filogenesi scientifica. Il recupero della dimensione storica della disciplina si integra con la curiosità degli studenti per i personaggi e le vicende storiche, il sapere viene rivissuto dagli allievi con costruzioni geometriche e congetture opportunamente semplificate che vengono condivise con la classe.

Tempo: (1h)

Fase 1 - I triangoli rettangoli
In questa fase, su apposita scheda, vengono presentati i triangoli rettangoli e si chiede agli allievi di individuare colorandoli i cateti e l'ipotenusa di vari triangoli rettangoli sotto riportati.

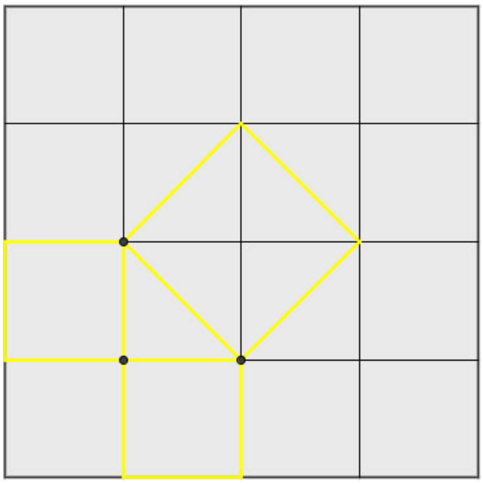


Tale esercizio, svolto nella fase iniziale, porta il docente a rimuovere eventuali misconcezioni momentanee degli allievi legate alla perpendicolarità tra rette. Le difficoltà incontrate dagli allievi nell'integrare proprietà spaziali (forme, posizione, grandezze) e qualità concettuali (astrattezza, generalità, perfezione) sono note e la loro armonizzazione deve essere fra gli obiettivi didattici di un insegnante.

E' bene quindi sottoporre sempre il disegno ad un controllo concettuale al fine di comprendere il modello mentale che lo studente si è costruito in relazione ad un concetto geometrico.

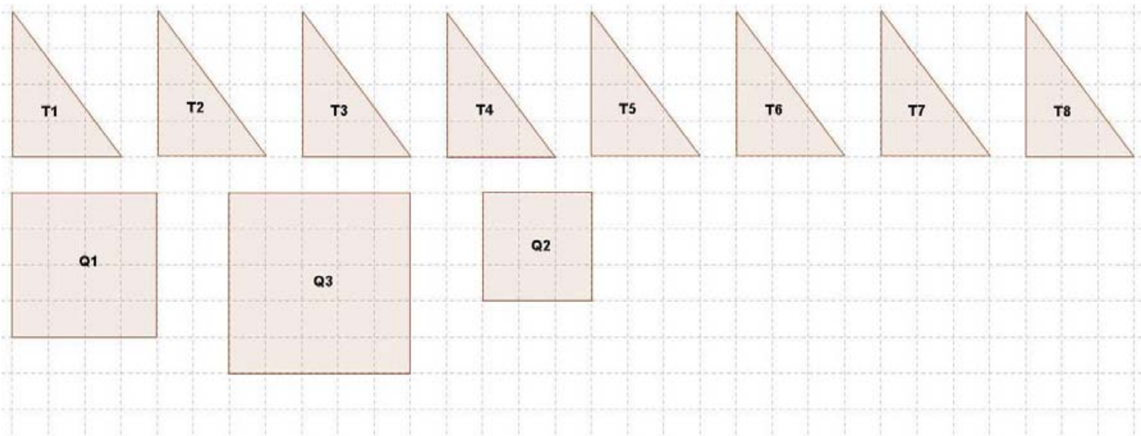
Fase 2 - L'attesa di Pitagora. Osserva, deduci e relaziona.

In queste due fasi si introduce il teorema di Pitagora, relativamente al triangolo rettangolo isoscele e quindi, alla sua generalizzazione per un triangolo rettangolo qualunque, secondo la dimostrazione dei Pitagorici. In entrambe, gli allievi, divisi in piccoli gruppi, sono invitati a esplorare, produrre congetture, e discuterle col gruppo classe.



Fase 3 – Quasi un gioco

Nel seguito la scheda da ritagliare fornita agli allievi che mette a disposizione triangoli e quadrati da comporre e scomporre opportunamente per svolgere la dimostrazione dei Pitagorici del teorema.



PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Scheda studente		
Cognome	Nome	classe

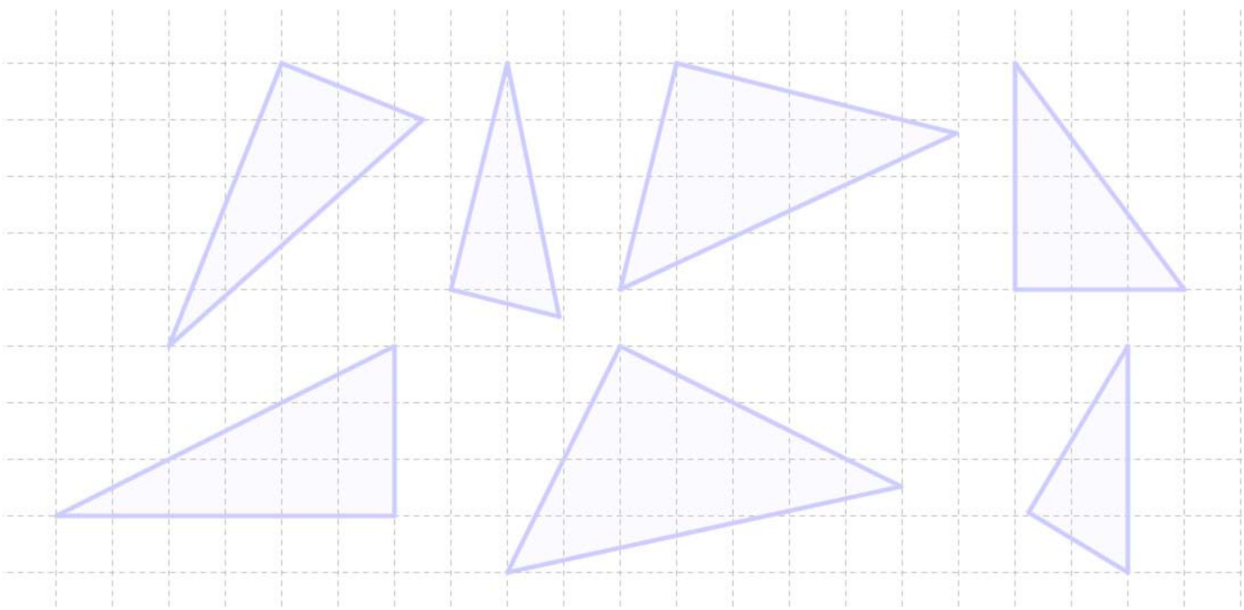
Attività 1 – Le mattonelle

Fase 1 - I triangoli rettangoli

In questa attività parleremo di triangoli rettangoli, pertanto ricorda che i lati di tali triangoli hanno nomi particolari:

- si chiamano **cateti** di un triangolo rettangolo ABC i due lati AB e AC che sono contenuti in rette perpendicolari
- il terzo lato BC, opposto all'angolo retto, si chiama **ipotenusa**.

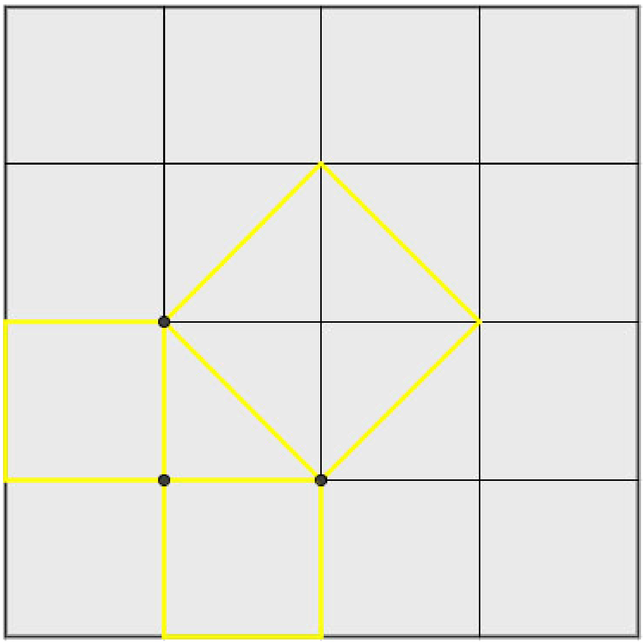
Ripassa con la matita rossa i cateti e con quella verde l'ipotenusa dei triangoli rettangoli della figura seguente.



Scheda studente		
Cognome	Nome	classe

Attività 1 - Le mattonelle

Fase 2 - L'attesa di Pitagora



Secondo la leggenda Pitagora scoprì il suo teorema mentre era in attesa di essere ricevuto dal tiranno della città greca di Samo.
Il pavimento della sala di ricevimento si presentava piastrellato come in figura, dove in giallo è evidenziato quanto Pitagora osservò, a partire dal triangolo ottenuto dividendo una piastrella lungo la sua diagonale.

Scrivi cosa osservi relativamente ai quadrati costruiti sui cateti:

....

....

....

....

....

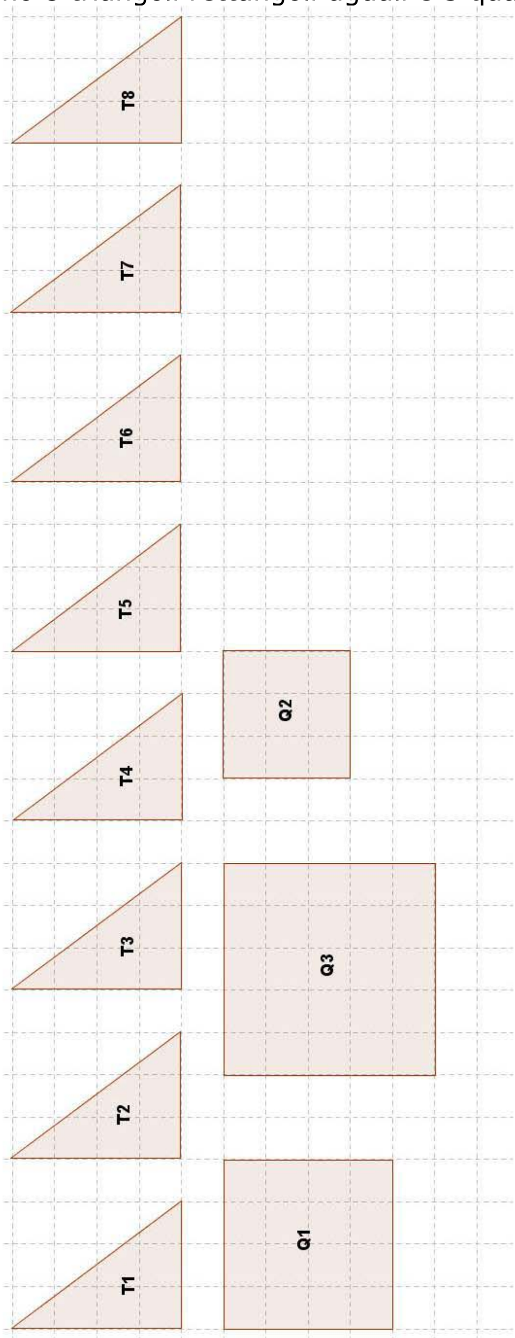
.

Scheda studente		
Cognome	Nome	classe

Attività 1 - Le mattonelle

Fase 3 – Quasi un gioco

Nella figura seguente, abbiamo 8 triangoli rettangoli uguali e 3 quadrati: ritagliali lungo i bordi.



Una scuola di qualità, per tutti

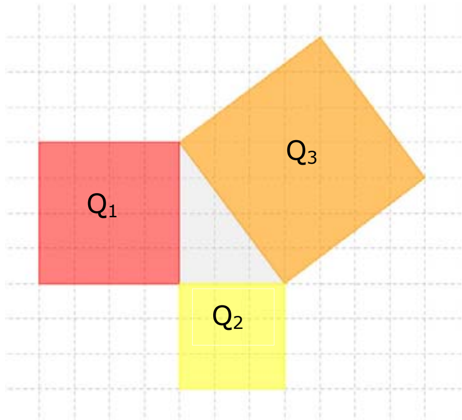
Scheda studente		
Cognome	Nome	classe

Attività 1 - Le mattonelle

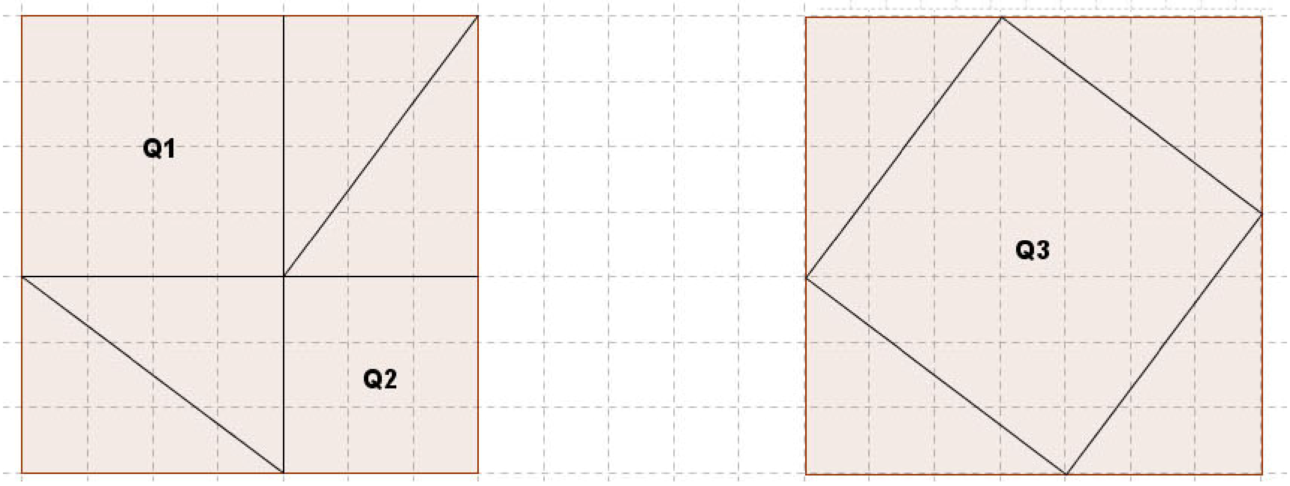
Fase 3 – Quasi un gioco (La dimostrazione dei Pitagorici)

Il quadrato Q_3 ha il lato lungo quanto l'ipotenusa di ciascuno dei triangoli, Q_1 ha il lato del cateto maggiore e Q_2 il lato del cateto minore.

Puoi verificarlo disponendoli come nella figura riportata a destra.



DISPONI Q_1 e Q_2 e 4 triangoli e Q_3 e gli altri 4 triangoli come nella figura seguente:



I due quadrati così composti sono uguali e sottraendo a ciascuno di essi uno alla volta i 4 triangoli rettangoli rimangono a sinistra i due quadrati **Q_1 e Q_2** costruiti sui cateti e nella composizione di destra rimane il quadrato **Q_3** costruito sull'ipotenusa.

RICORDA - L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti: **$Area(Q_1) + Area(Q_2) = Area(Q_3)$**

Questa importante proprietà di un triangolo rettangolo è nota come **Teorema di Pitagora.**

Attività 2 – I puzzle di Peligal e Bhaskara

Indicazioni per il docente

Tipologia: attività laboratoriale con disegno di modelli in carta di triangoli, rettangoli e quadrati da comporre e scomporre per approfondire due tra le più intuitive dimostrazioni, sviluppatesi nel corso dei secoli, del teorema di Pitagora.

Obiettivo didattico: Lo scopo di questa attività è di far costruire e visualizzare concretamente le proprietà scoperta da Pitagora, utilizzando ulteriori modelli geometrici dimostrativi disegnati e costruiti dagli allievi, e stimolare la collaborazione, la condivisione del sapere e la consapevolezza da parte degli allievi di comunicare con un linguaggio appropriato i loro procedimenti risolutivi.

Tempo: (2h)

La dimostrazione data da Euclide nella I,47 dei suoi Elementi (vedi figura riportata nel seguito) ebbe varia fortuna nella didattica del teorema di Pitagora, ma ben presto ad essa furono preferite altre dimostrazioni.

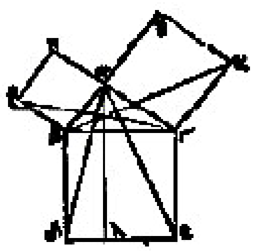
PROPOSIT. XLVII.
Theorema.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

In triangulis rectangulis: quadratum lateris angulum rectum subtendentis, est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

ἡ ἔκθεσις.

Sit triangulus rectangulus αβγ, habens angulum βαγ rectum. ὁ διορισμός. Dico quod quadratum lateris βγ, est æquale quadratis laterum βα, αγ. ἡ κατασκευή. Describatur à linea βγ, quadratum βδεγ. Item à linea βα quadratum βη. Præterea à linea αγ quadratum γθ. Ducatur per punctum α, alterutri linearum βδ, γε, æquedistans recta linea αλ. Ducantur duæ lineæ rectæ αδ, ζγ.



La più nota applica il cosiddetto I teorema di Euclide riguardante l'equivalenza tra il quadrato costruito su un cateto di un triangolo rettangolo e il rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.

Per il primo Teorema di Euclide:

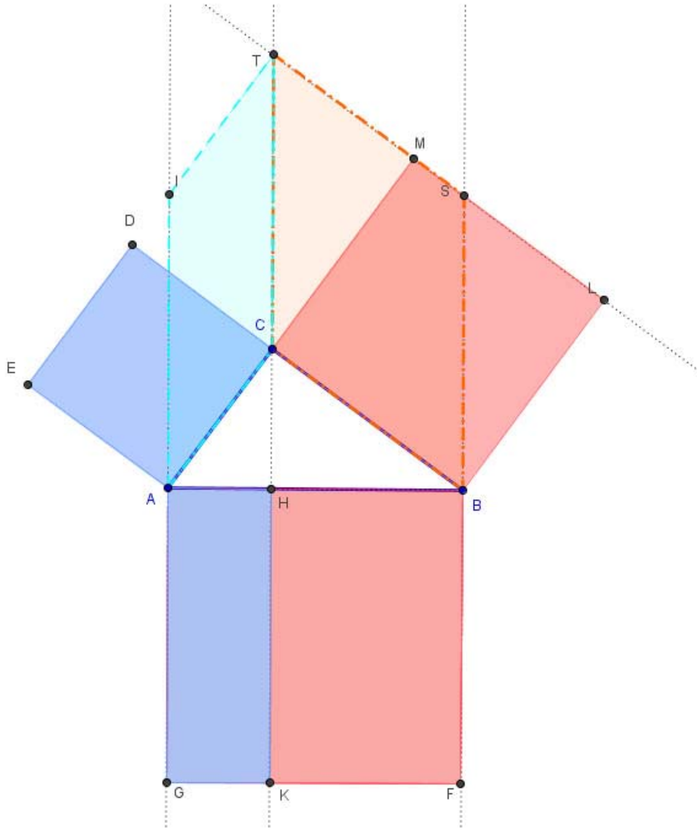
ACDE è equivalente a AHKG, in quanto entrambi equivalenti al parallelogramma ACTI

BCML è equivalente a BHKF, in quanto entrambi equivalenti al parallelogramma BSTC.

Pertanto sommando si ha che :

(ACDE+BCML) è equivalente a ABFG

La figura di fianco riportata è stata esportata dalla costruzione fatta con Geogebra. Tutti i file delle costruzioni di Geogebra utilizzati in questa attività sono fornite nel kit PQM.



Fase 1 – Il puzzle di Peligal (1873)

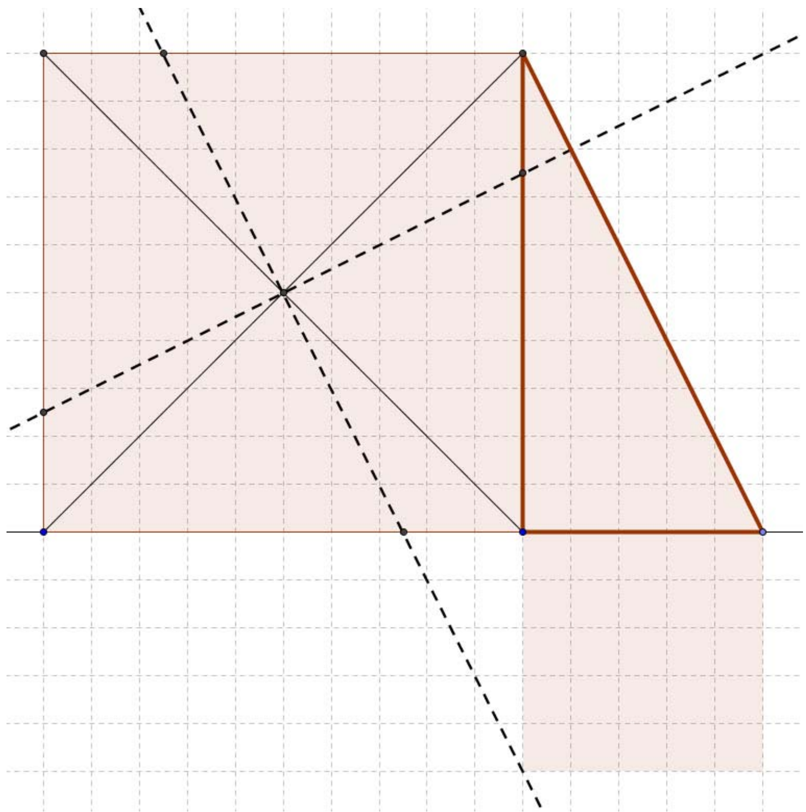
Tra le tante dimostrazioni del teorema di Pitagora, ne troviamo alcune veramente curiose. Tra queste quella nel 1873 dell'agente di cambio Henry Perigal con la passione per la matematica.

Egli divise il quadrato costruito sul cateto maggiore in quattro parti, con due segmenti passanti per il centro del quadrato stesso, uno dei quali parallelo e l'altro perpendicolare all'ipotenusa BC, e ricompose poi i quattro pezzi, insieme al quadrato costruito sull'altro cateto, nel quadrato dell'ipotenusa.

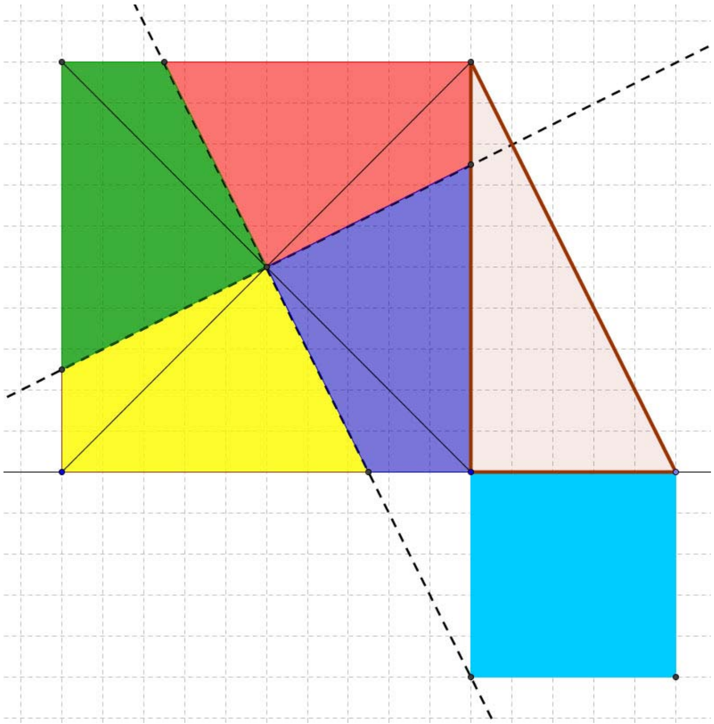
Si tratta naturalmente di dimostrare l'equivalenza delle parti in cui sono stati divisi i quadrati dei cateti con quelle ricomposte sul quadrato dell'ipotenusa.

Agli allievi viene fornita una scheda con il disegno del triangolo rettangolo di base sul quale operare la costruzione di cui vengono fornite le istruzioni.

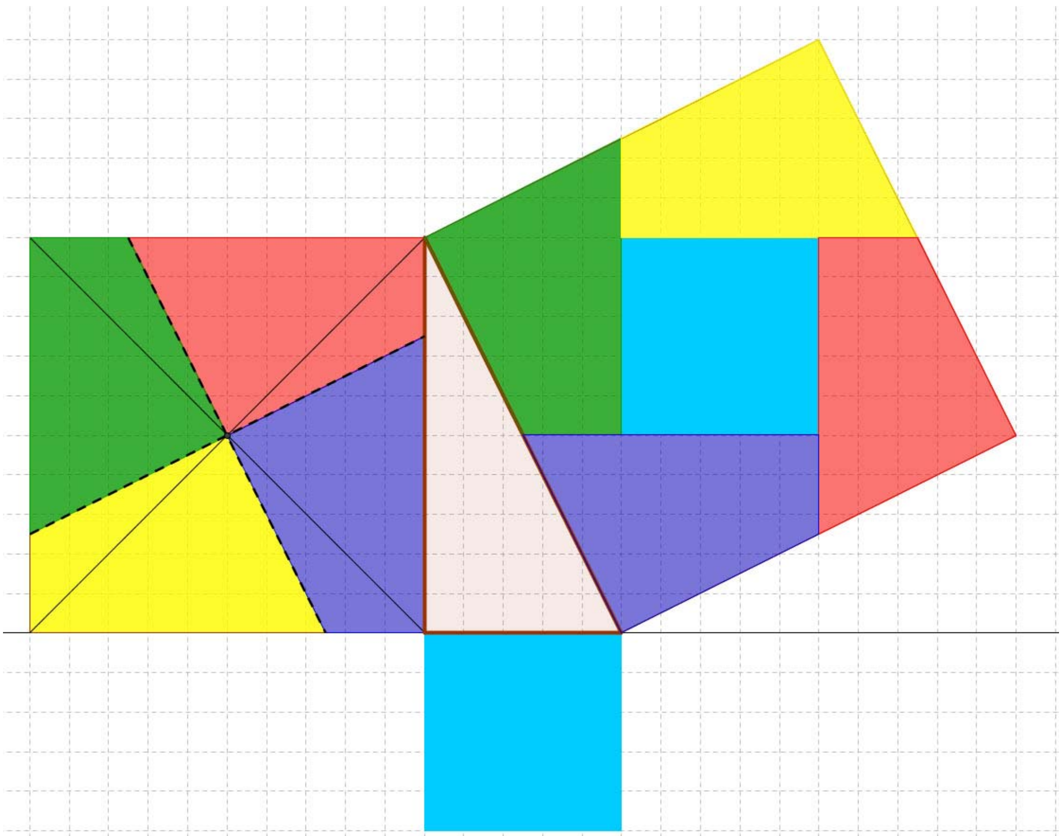
Nel seguito la costruzione elaborata con il software Geogebra.



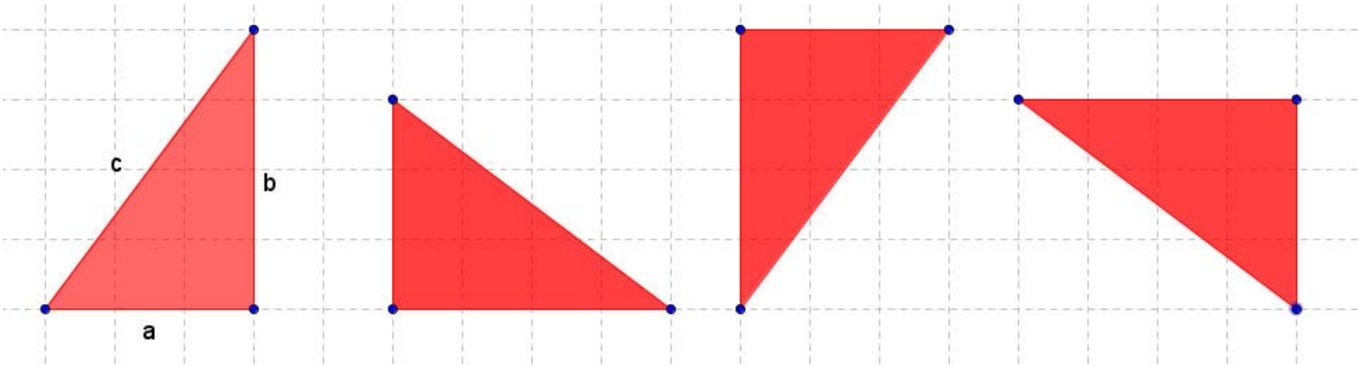
Si procede quindi a colorare le parti della figura che dovranno essere nel seguito adoperate per la costruzione dimostrativa.

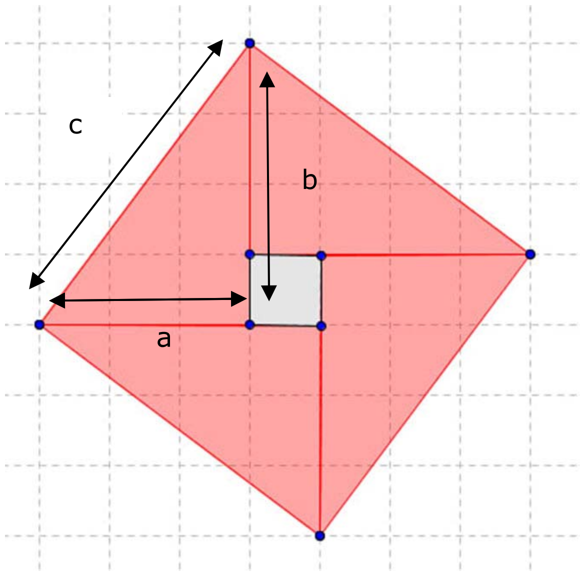


Ed infine dopo aver effettuato la decomposizione e composizione si ottiene:



Fase 2 – Il puzzle di Bhaskara, XII sec.





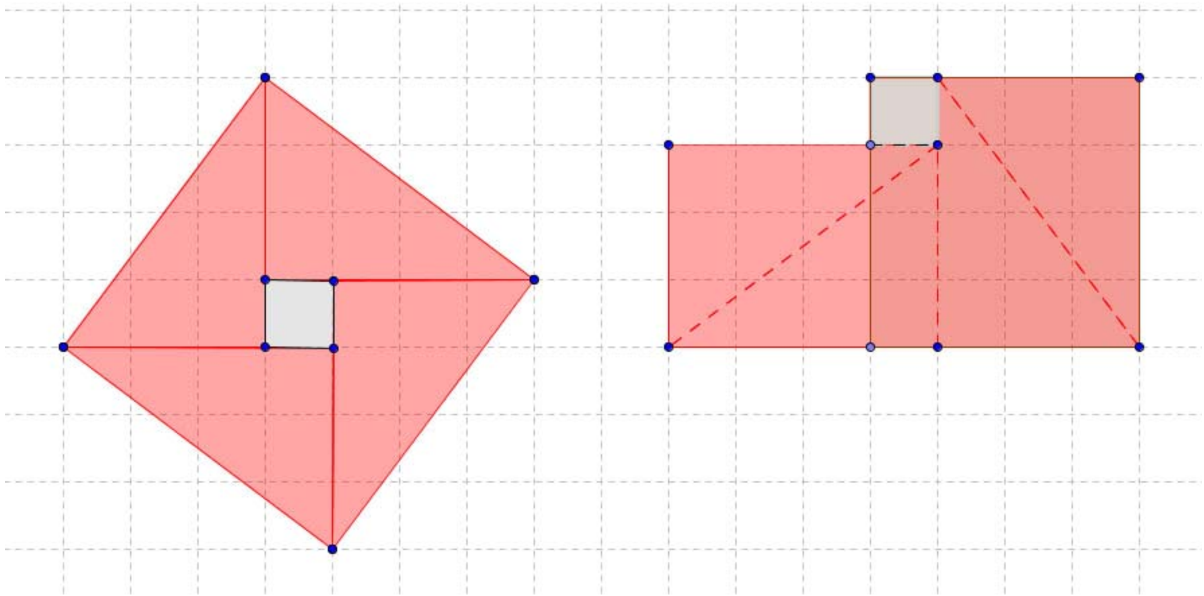
Più complesso è comprendere la dimostrazione basata sulla figura a fianco riportata, che però offre l'opportunità di introdurre anche un semplice calcolo algebrico delle formule delle aree.

A partire da quattro rettangoli uguali di area $\frac{ab}{2}$, tre dei quali sono stati ruotati rispettivamente di 90°, 180° e 270°, e componendoli insieme con una ulteriore rotazione, si ottiene un quadrato di lato l'ipotenusa c. Il piccolo quadrato bianco ha il lato che è pari alla differenza dei cateti e area $(a-b)^2$, mentre il quadrato grande è quello dell'ipotenusa.

Otteniamo pertanto che: $c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$

La dimostrazione geometrica si attua componendo i triangoli in altro modo e ottenendo i due quadrati costruiti sui cateti affiancati tra loro.

Nella figura seguente nel secondo disegno a destra, con un po' di attenzione si mettono in evidenza i due quadrati costruiti sui cateti. Basta prolungare, come fatto in figura) verso il basso il lato verticale sinistro del quadratino bianco.



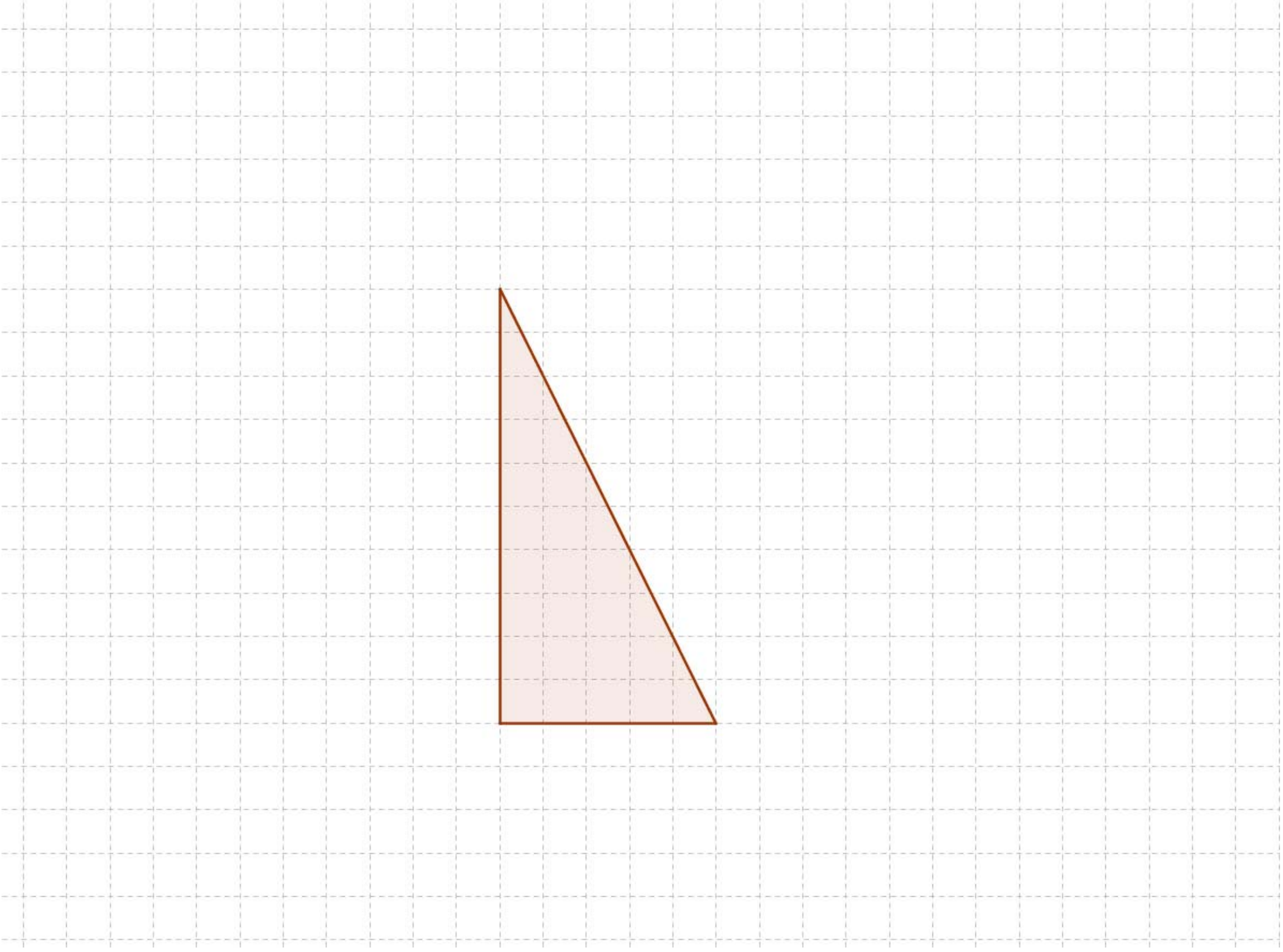
Una ulteriore dimostrazione similare a quest'ultima di Bhaskara è quella di G. B. Airy (1855) descritta sul sito del "Giardino di Archimede", che può essere proposta dall'insegnante connettendosi a Internet e discutendone insieme con la classe. (http://web.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/exh_pitagora/scheda3.html) o riproducendola, analogamente a quanto fatto precedentemente, su cartoncino.

Scheda studente		
Cognome	Nome	classe

Attività 2

I puzzle di Peligal e Bhaskara

Nel corso dei secoli, utilizzando la tecnica di composizione e scomposizione di figure che abbiamo visto nella prima attività, sono state proposte diverse dimostrazioni del Teorema di Pitagora, alcune veramente curiose: vediamo per prima quella nel 1873 di Henry Peligal.



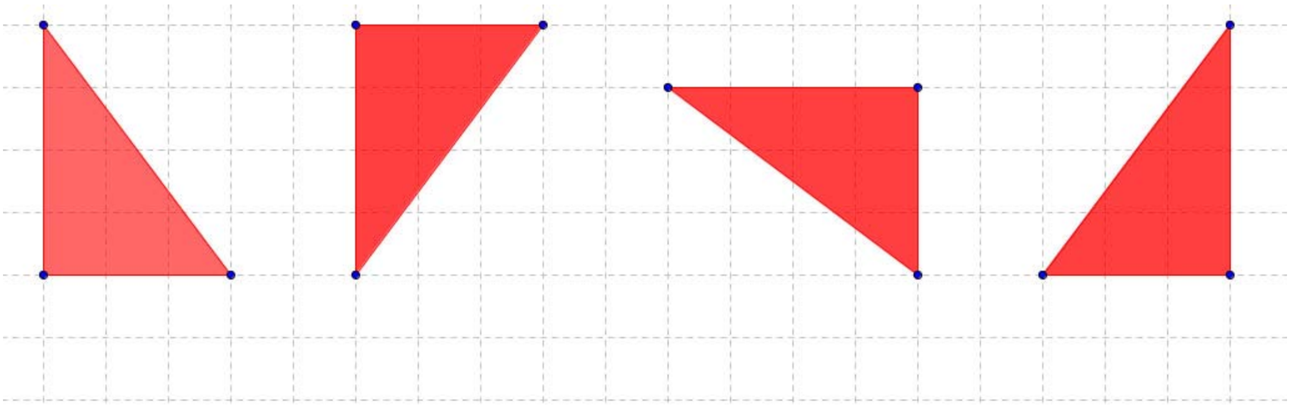
1. Costruisci il quadrato sul cateto minore e coloralo di azzurro.
2. Costruisci il quadrato sul cateto maggiore e dividilo in quattro parti, con due segmenti passanti per il centro del quadrato stesso, uno dei quali parallelo e l'altro perpendicolare all'ipotenusa BC.
3. Colora con colori diversi i quattro pezzi ottenuti.
4. Ritaglia i quattro pezzi e il quadrato costruito sul cateto minore, e con essi prova a costruire il quadrato dell'ipotenusa.

Scheda studente		
Cognome	**Nome**	**Classe**

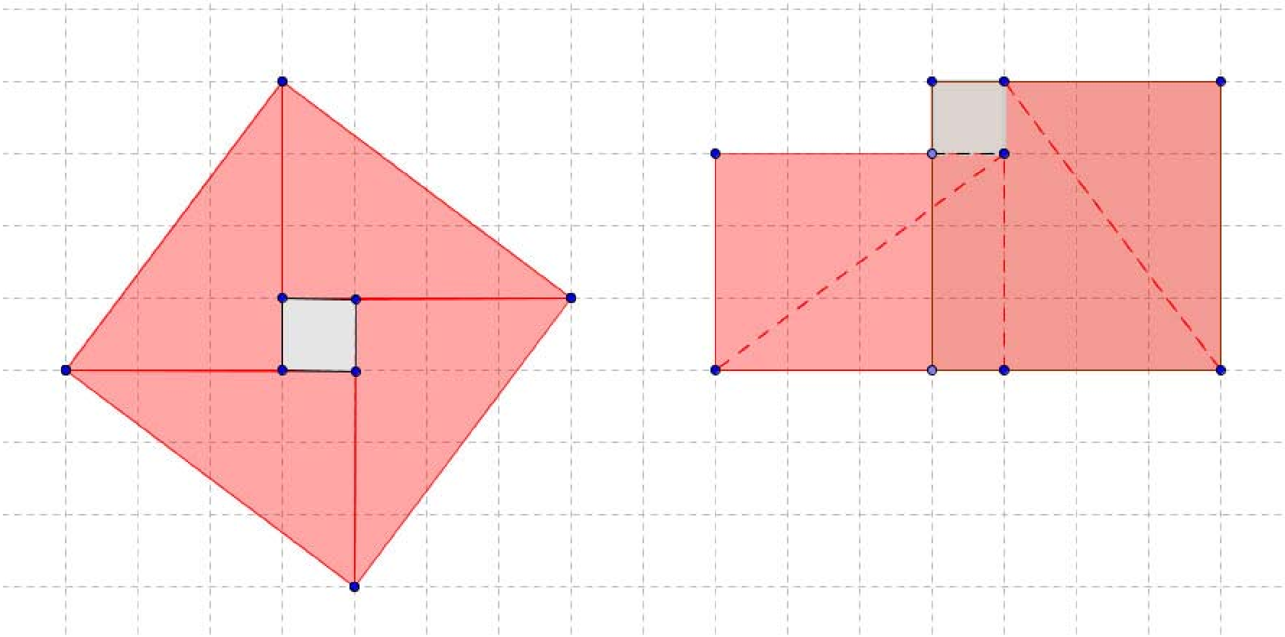
Attività 2

I puzzle di Peligal e Bhaskara

Un'altra costruzione che mette in evidenza il teorema di Pitagora è del 1200, detta di Bhaskara. Nella figura in basso si parte con 4 triangoli rettangoli uguali.



I quattro rettangoli possono essere disposti in modo da formare il quadrato in basso a sinistra, che ha per lato l'ipotenusa oppure, come a destra in basso, dove sono stati evidenziati i due quadrati costruiti sui cateti.



Il teorema di Pitagora: dall'osservazione delle scomposizioni e composizioni dei quadrati e dei triangoli puoi affermare che:

....

....

....

....

....

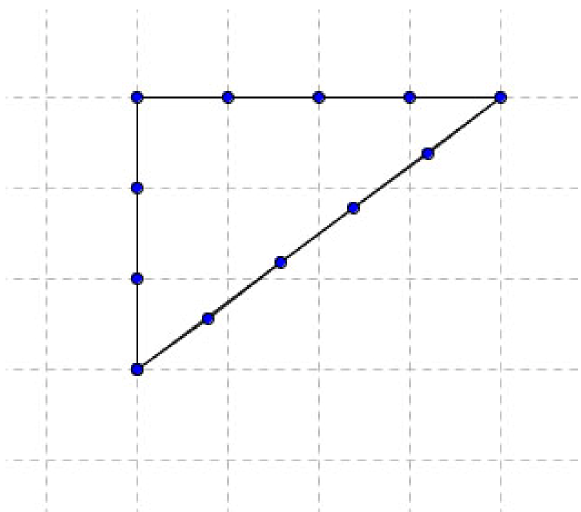
Attività 3
Indicazioni per il docente

Cordicelle e terne Pitagoriche

Tipologia: attività laboratoriale, svolta in piccoli gruppi, con l'uso di una corda opportunamente annodata, per riprodurre il metodo usato dai tenditori di corde degli antichi Egizi con l'uso delle terne Pitagoriche.

Obiettivo didattico: lo scopo di questa attività è quello di introdurre il teorema inverso di Pitagora, mirando a recuperare una dimensione storica della disciplina che si integra con la curiosità degli studenti per i personaggi e le vicende storiche, il sapere viene rivissuto dagli allievi con attività di gruppo ed esercitative, opportunamente semplificate, che vengono condivise con la classe.

Tempo: (1h)



Dopo una breve richiamo storico da parte dell'insegnante sulla matematica al tempo degli Egizi, agli allievi vengono fornite tramite una scheda operativa, indicazioni per posizionare opportunamente i nodi della corda – come in figura –e poter rilevare che terne soddisfacenti la relazione pitagorica sottendono triangoli rettangoli. L'insegnante farà rilevare che quanto appreso nelle attività 1 e 2 determina una proprietà dei triangoli rettangoli (il teorema di Pitagora), mentre il metodo degli antichi Egizi propone inversamente che se i lati di un triangolo hanno misure tali che la somma dei quadrati di due è uguale al quadrato della terza, allora il triangolo è rettangolo.
Si procede quindi ad una parte esercitativa dove, attraverso le formule generatrici, si determinano alcune terne di numeri soddisfacenti la relazione di Pitagorica.

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Scheda studente		
Cognome	**Nome**	**classe**

Attività 3
Cordicelle e terne pitagoriche

Prendi una cordicella lunga e suddividila in 12 parti uguali, applicando 13 nodi equidistanti in tutto.

Con l'aiuto di un tuo compagno fissa il quarto e l'ottavo nodo e tendi la corda unendo gli estremi della stessa.

OSSERVA – La terna 3 - 4 - 5 determina un triangolo rettangolo. Questo procedimento usato anche dagli antichi Egizi per delimitare le basi delle piramidi, ci dice che se i lati di un triangolo hanno misure tali che la somma dei quadrati di due è uguale al quadrato della terza allora il triangolo è rettangolo.

Pitagora elaborò un metodo per generare terne di numeri che indicheremo con a, b, c per i quali $a^2+b^2=c^2$. Completa la tabella sottostante seguendo le operazioni indicate.

a dispari	$\frac{a^2-1}{2}$=b	$\frac{a^2+1}{2}$=c
3	$\frac{3^2-1}{2}=4$	$\frac{3^2+1}{2}=5$

a^2	b^2	c^2

FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 Unione Europea MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

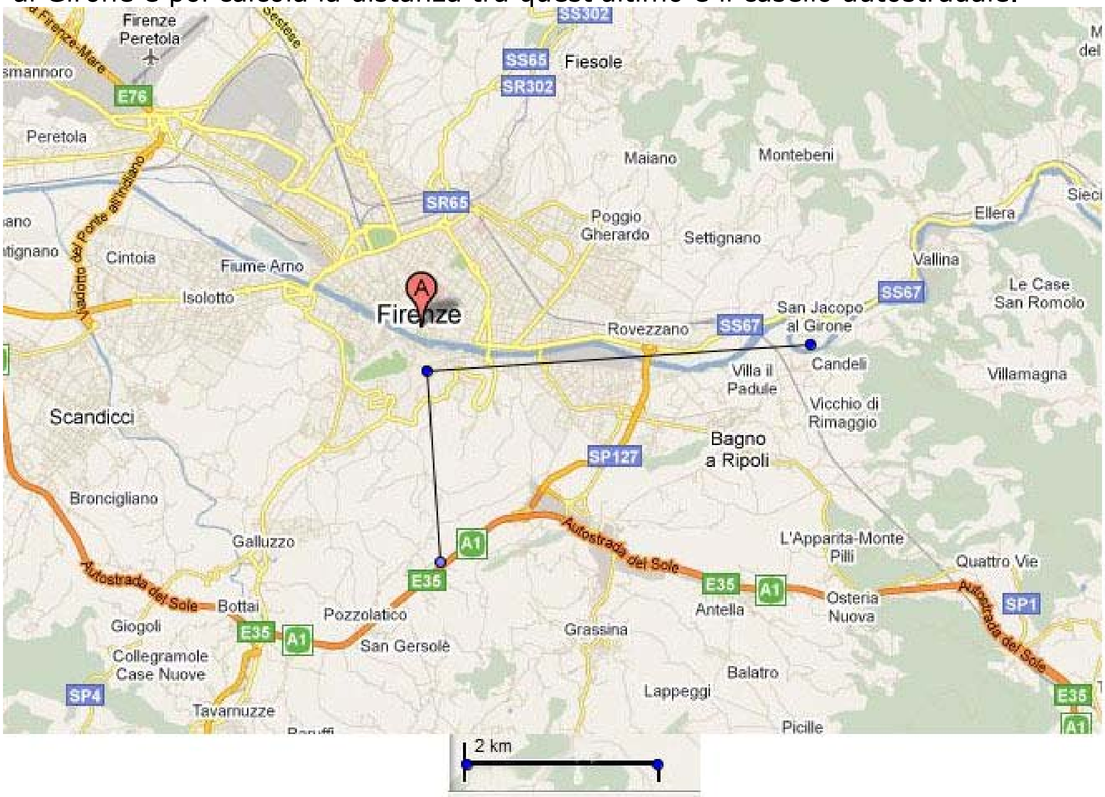
PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011

Una scuola di qualità, per tutti

Scheda studente		
Cognome	**Nome**	**classe**

Attività 4
Esercizi e problemi

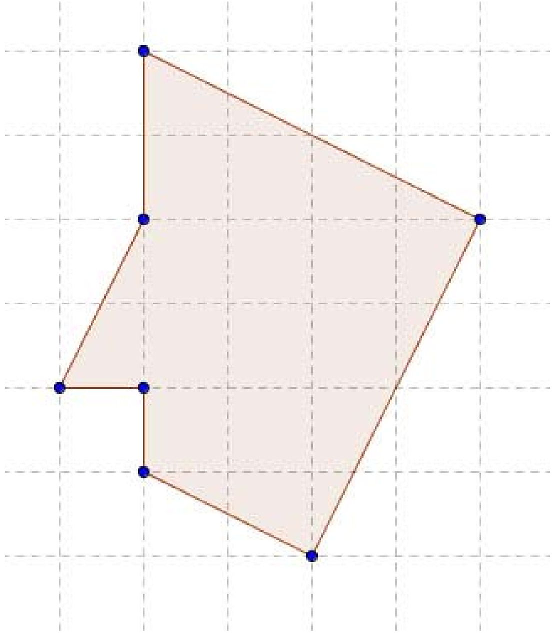
1. Misura sulla mappa la distanza tra Firenze il casello autostradale e tra Firenze e San Jacopo al Girone e poi calcola la distanza tra quest'ultimo e il casello autostradale.



2. Completa la tabella e calcola la misura del lato mancante del triangolo rettangolo ABC rettangolo in C:

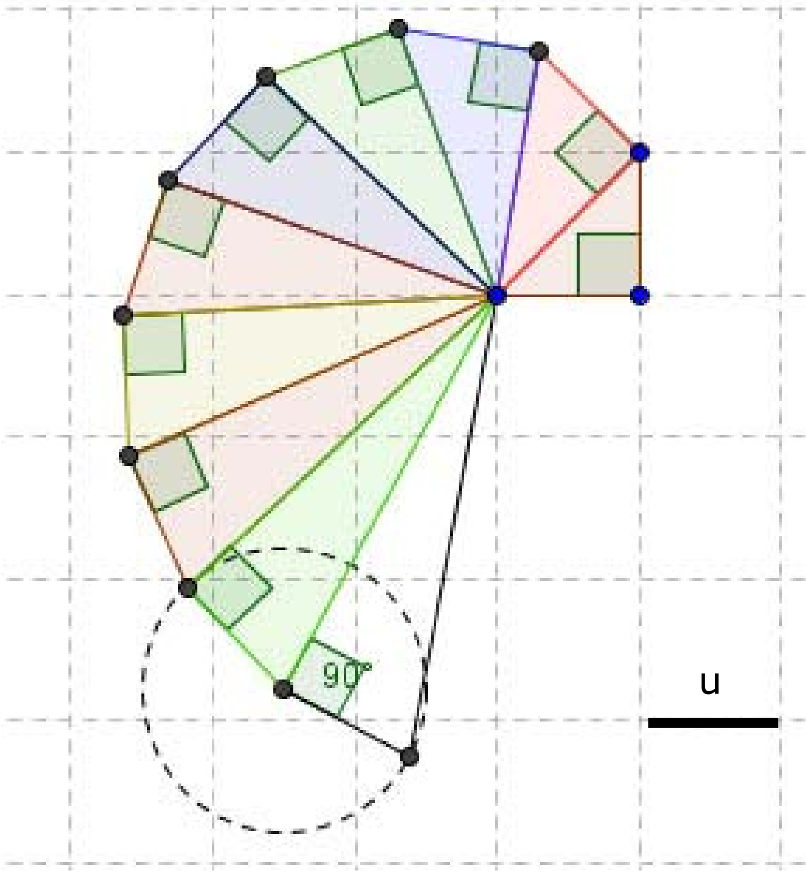
cateto a	cateto b	Ipotenusa c
9m	12m	
	5cm	13cm
9cm		15cm
	24cm	30cm

3. La misura del lato di ogni quadratino della griglia è di 2 cm, calcola l'area e il perimetro del poligono della figura seguente.



4. Una scala a pioli lunga 3 metri è appoggiata al muro . La sua base dista dal muro 1 metro. A quale altezza dal suolo è appoggiata l'altra estremità della scala?

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti



5. Nella figura sopra riportata vi è la costruzione della chiocciola pitagorica, il triangolo rettangolo e isoscele di base ha lato 1u. Calcola le ipotenuse dei triangoli rettangoli costruiti a partire da esso con cateto minore 1u.

Cosa osservi relativamente ad esse?

....

....

....

....

....

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Attività 5
Indicazioni per il docente

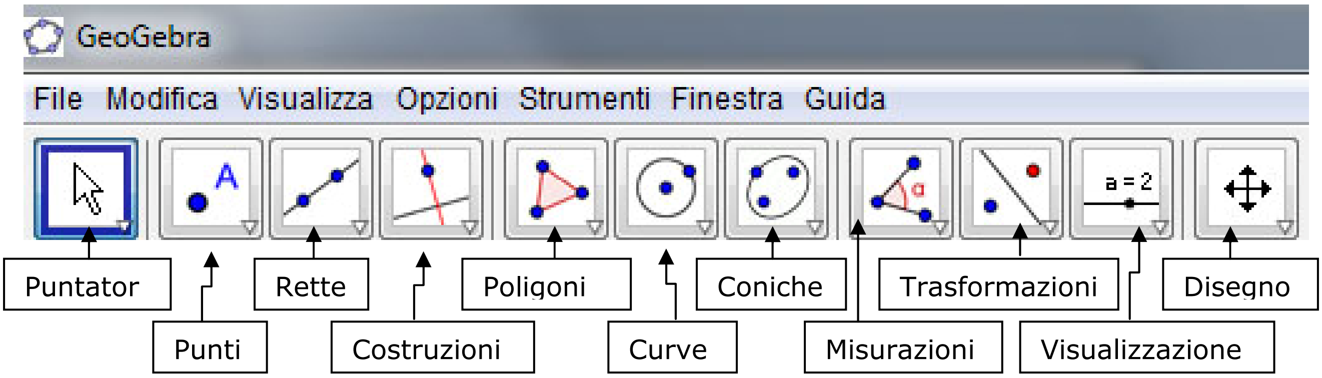
Laboratorio di informatica o
LIM (lavagna interattiva multimediale)

Tipologia: *attività da svolgere nel laboratorio di informatica o con la lavagna interattiva multimediale.*

Obiettivo didattico: *lo scopo di questa attività è usufruire delle potenzialità dell'uso delle nuove tecnologie nell'insegnamento della matematica e nella costruzione di ambienti di apprendimento collaborativo che permettano agli studenti concrete e significative esperienze di oggetti astratti, come sono gli oggetti matematici, in una prospettiva che, grazie all'azione dell'insegnante, vede le TIC mediatrici nel processo di acquisizione di conoscenza degli allievi.*

Tempo: (1h)
Nella presente sessione di lavoro con la classe proponiamo l'utilizzo del software di geometria dinamica Geogebra, liberamente scaricabile e fruibile dal sito www.geogebra.org, per investigare la relazione tra le aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo.

Il menù dei comandi di Geogebra si presenta con una serie di icone: puntatore, punti, rette, etc. che a loro volta attivano menù a tendina di ulteriori comandi.



Gli strumenti che utilizzeremo in questa attività sono *rette perpendicolari* del comando [costruzioni], *segmento tra due punti* del comando [rette] e *poligono regolare* del comando [Poligoni].

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Per comparare le aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo per prima cosa costruiremo il triangolo rettangolo e quindi i tre quadrati come in figura 1.

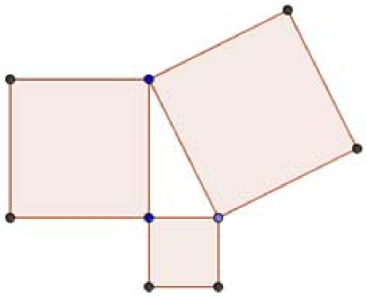


Figura 1

Nell'ambiente Geogebra sono attive contemporaneamente *la finestra algebra* e la *finestra disegno* con le *coordinate Oxy*, in questa esercitazione disattiveremo dal menù *Visualizza* la *finestra Algebra* e le *coordinate* e poi procederemo alla costruzione.

1.) Selezionare il comando [rette]/**Segmento tra due punti** e spostare il puntatore sul foglio da disegno cliccando due punti distinti per formare il segmento ***AB***.
2.) Se non compare alcuna etichetta dei punti disegnati, selezionare [puntatore] dalla barra dei menù e su ciascun punto cliccare col mouse destro e selezionare *Mostra etichetta*. (Ogni volta che si utilizza il mouse destro su un oggetto appare un menù con una serie di operazioni da utilizzare per cambiare le proprietà dell'oggetto selezionato).
3.) Per costruire la perpendicolare al segmento ***AB*** passante per ***B***, selezioniamo [costruzioni]/**retta perpendicolare** selezionando dapprima il segmento **AB** e poi il punto ***B***.
4.) Introduciamo ora un punto **C** sulla perpendicolare, per far questo selezioniamo dal comando [punti]/**nuovo punto** e clicchiamo in un qualunque posto sulla retta perpendicolare. Otterremo come in Figura 2.

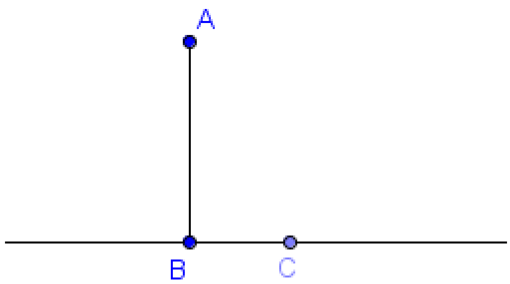


Figura 2

5.) Per costruire il quadrato su ogni cateto selezioniamo dal comando [poligoni]/**poligono regolare** e poi indichiamo col puntatore il punto ***C*** e ***A***.
6.) Nell'attivazione del commando **Poligono Regolare** indicare il numero 4 come numero di lati.

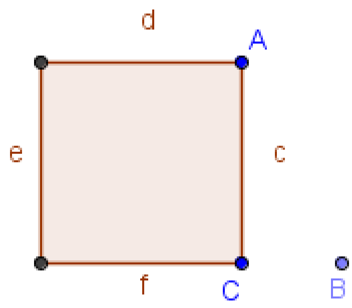


Figura 3 – Il quadrato sul lato AC

7.) Si ripete analogo procedimento per il lato ***BC*** e ***AB***

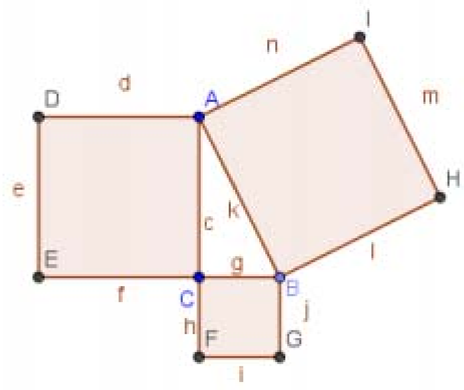


Figura 4 – Quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo ABC

8.) Per eliminare le etichette che compaiono su ogni oggetto geometrico occorre selezionare l'oggetto e attivare col mouse destro il comando *nascondi etichetta.*
9.) Analogamente utilizzando i comandi del mouse destro si possono rinominare i lati come fatto in figura 5.

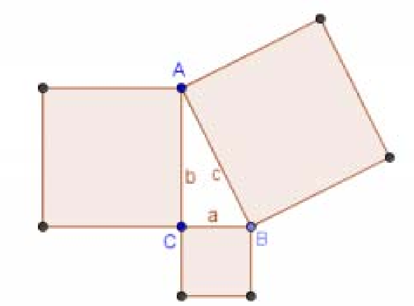


Figura 5 - Triangolo ABC

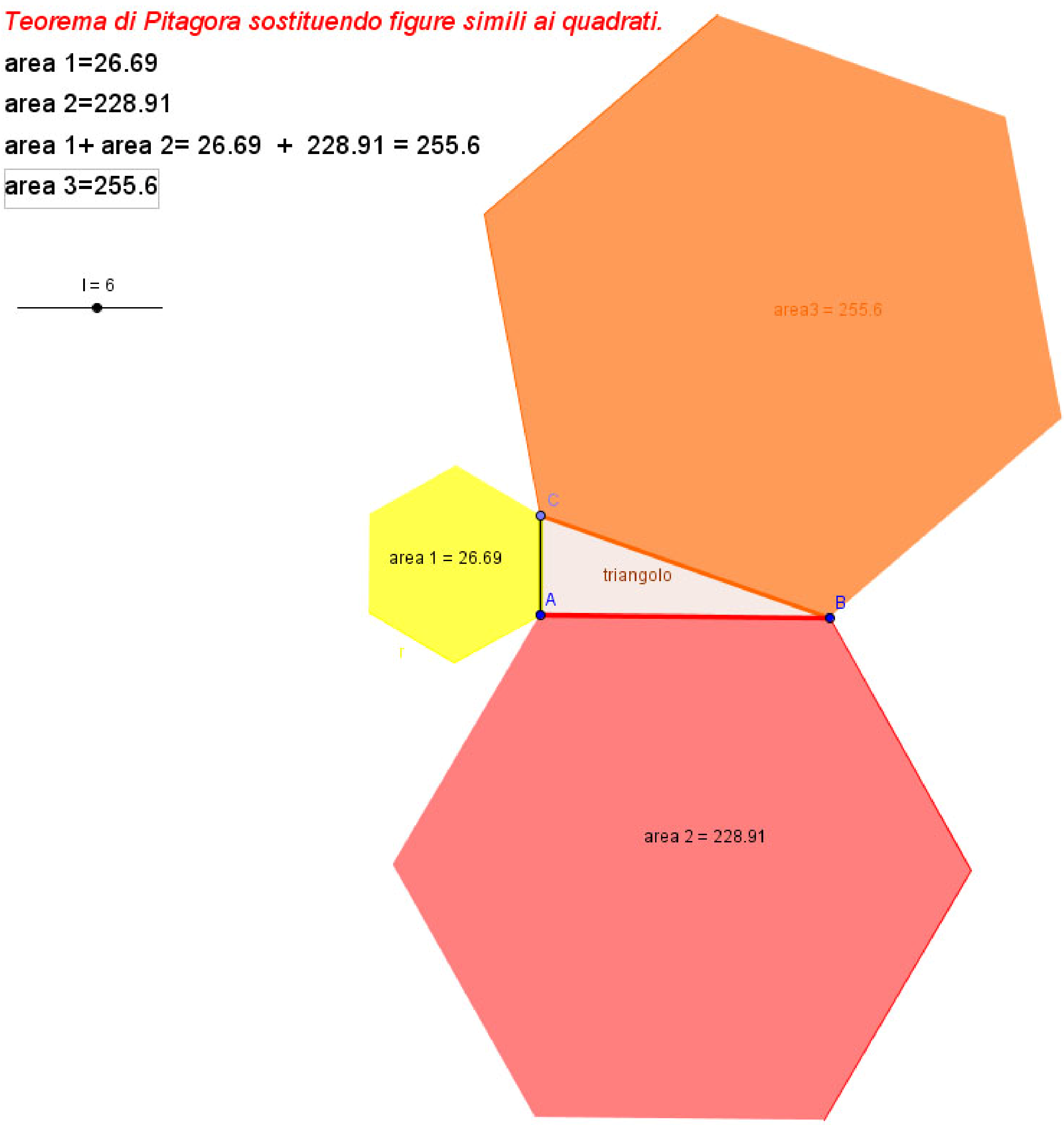
10.) Infine, selezionare dal comando [Misurazioni]/***area*** e indicare successivamente i tre quadrati.

11.) Si muovono quindi i vertici del triangolo e si chiede agli allievi di annotare cosa si osserva nella misurazione delle aree.

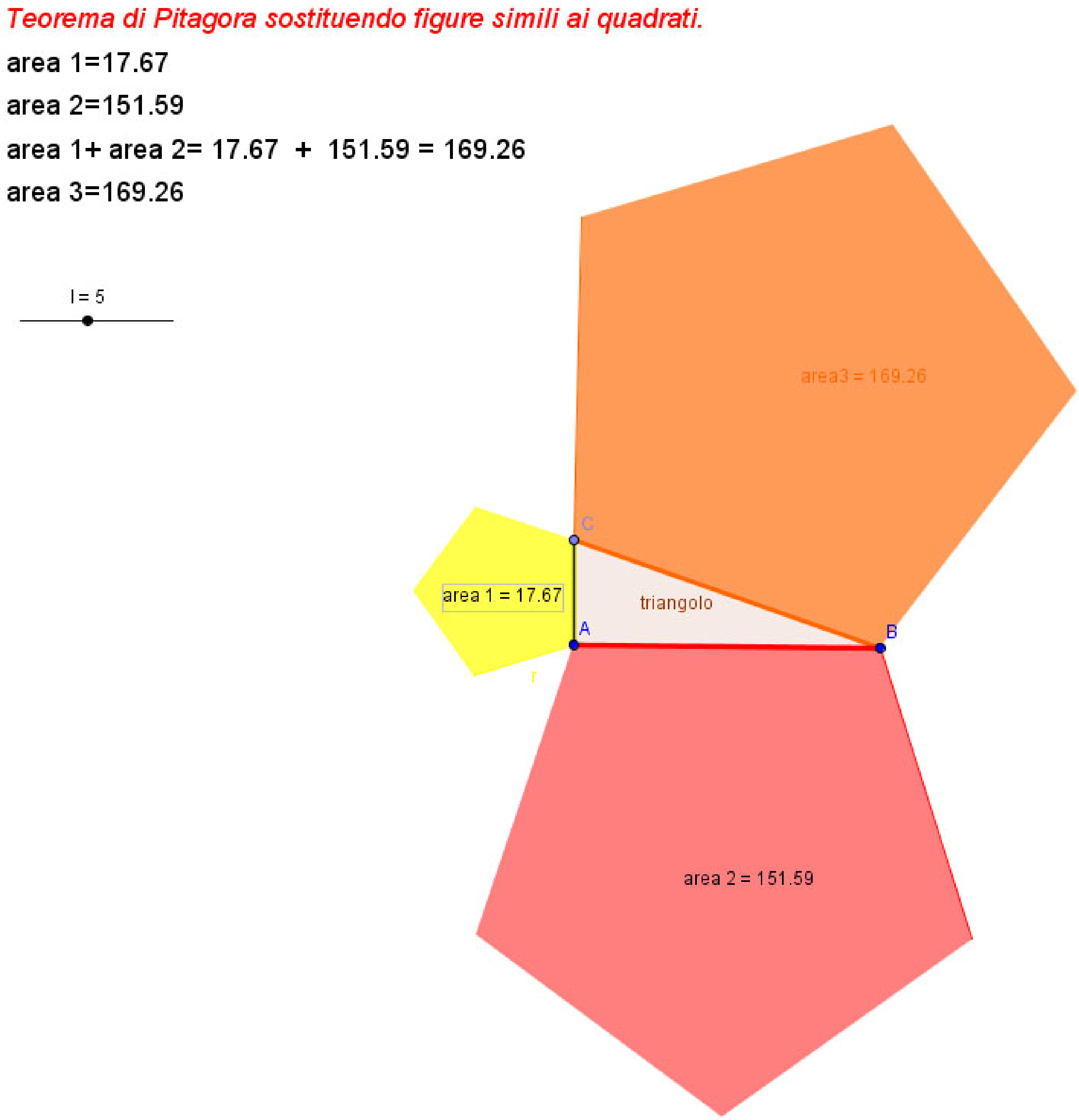
Attività integrative
Indicazioni docente

Il Teorema di Pitagora generalizzato

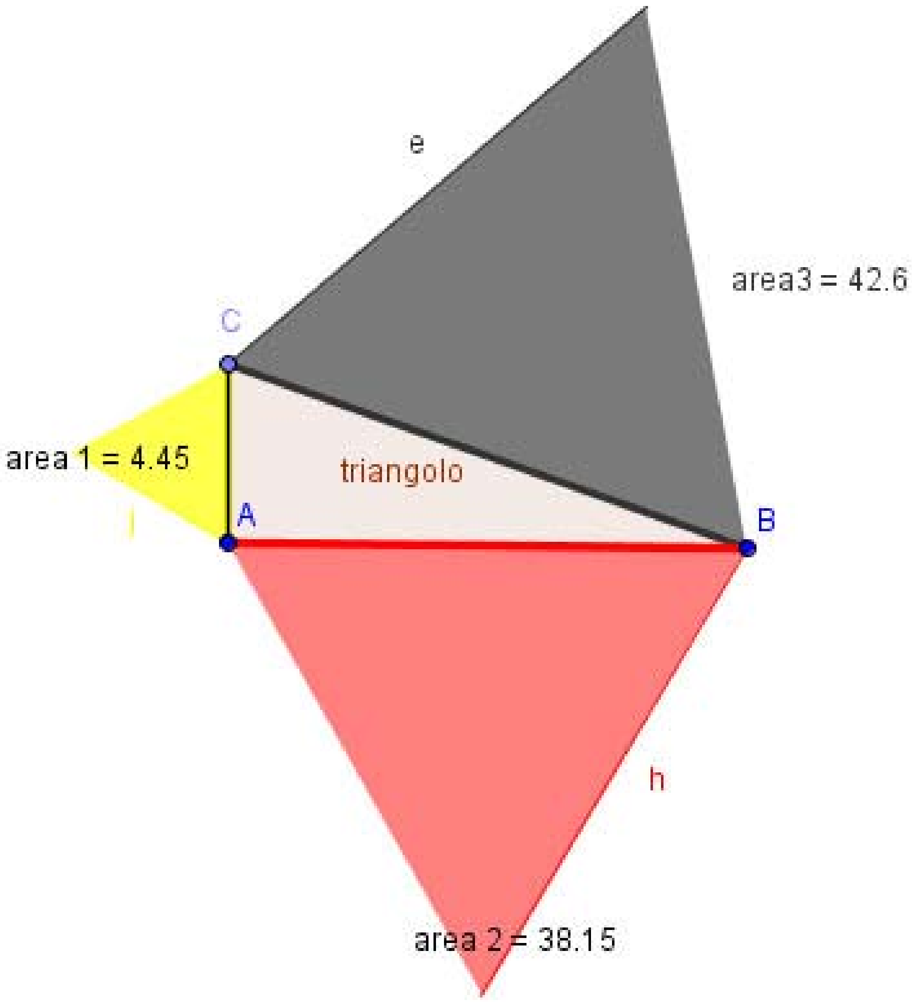
La proprietà espressa dal teorema di Pitagora vale anche se sui lati del triangolo si costruiscono figure tra loro simili come, per esempio, poligoni regolari. Nel seguito sono riportate le costruzioni effettuate con il software Geogebra.



L'uso della slide l in Geogebra permette di variare la costruzione relativamente al numero dei lati dei poligoni regolari e di verificare la proprietà pitagorica.

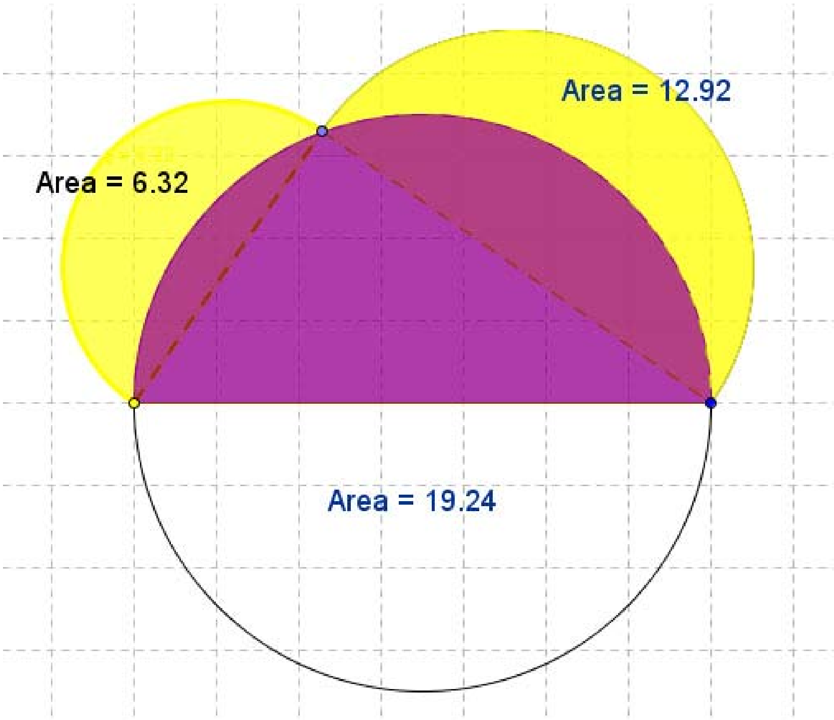


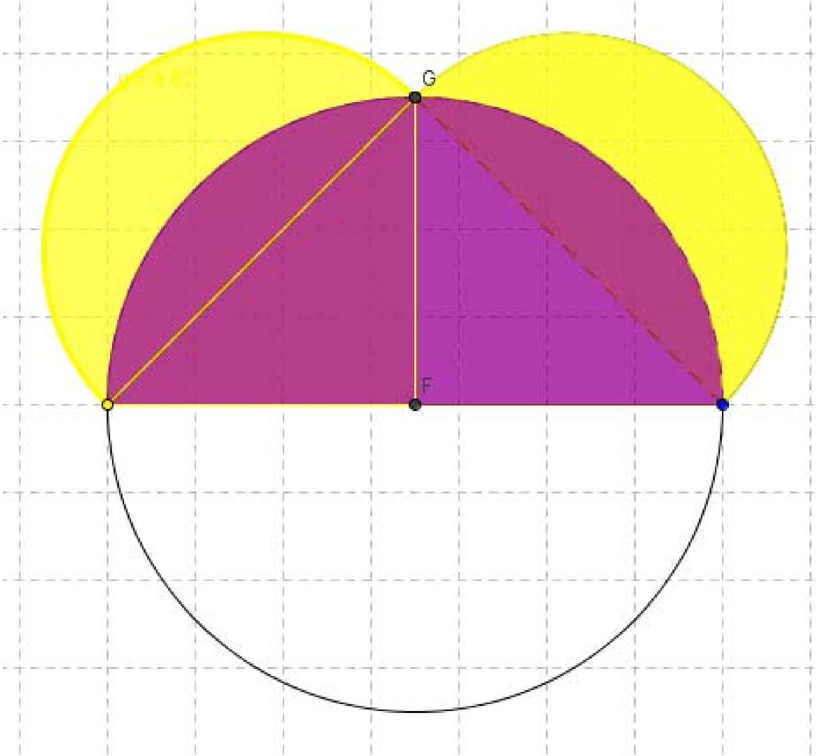
Ed infine se l=3 si ha:



Le Lunule – (dal latino *lunulae*, piccole lune)

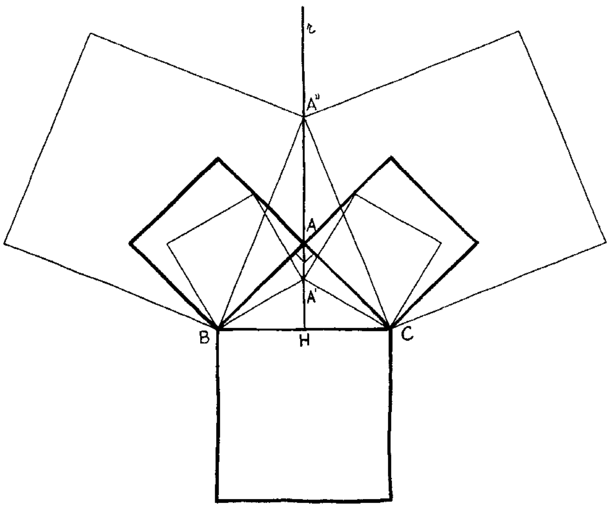
Un caso interessante è quando le figure simili sono semicerchi. La relazione Pitagorica continua a sussistere ovvero la somma delle aree dei semicerchi sui cateti è uguale all'area del semicerchio costruito sull'ipotenusa. Nella figura di seguito riportata è riprodotta, con l'uso del software Geogebra, la dimostrazione di Ippocrate di Chio: la prima in cui si dimostra che una figura rettilinea (il triangolo) è equivalente a una curvilinea (la lunula).
Costruiti i tre semicerchi sui lati del triangolo rettangolo di base, si ribalta quello costruito sull'ipotenusa attorno ad essa e tolte sia al semicerchio grande che ai due piccoli le parti viola in comune, le figure che restano, cioè il triangolo e le due figure gialle a forma di luna (che si chiamano lunule), avranno area uguale. Se poi il triangolo è isoscele, una lunula è uguale a mezzo triangolo.





Considerazioni sul teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora e il suo inverso forniscono una condizione necessaria e sufficiente per individuare i triangoli rettangoli:



dette a e b le misure di cateti e c la misura dell'ipotenusa si verifica che:

$a^2 + b^2 = c^2$

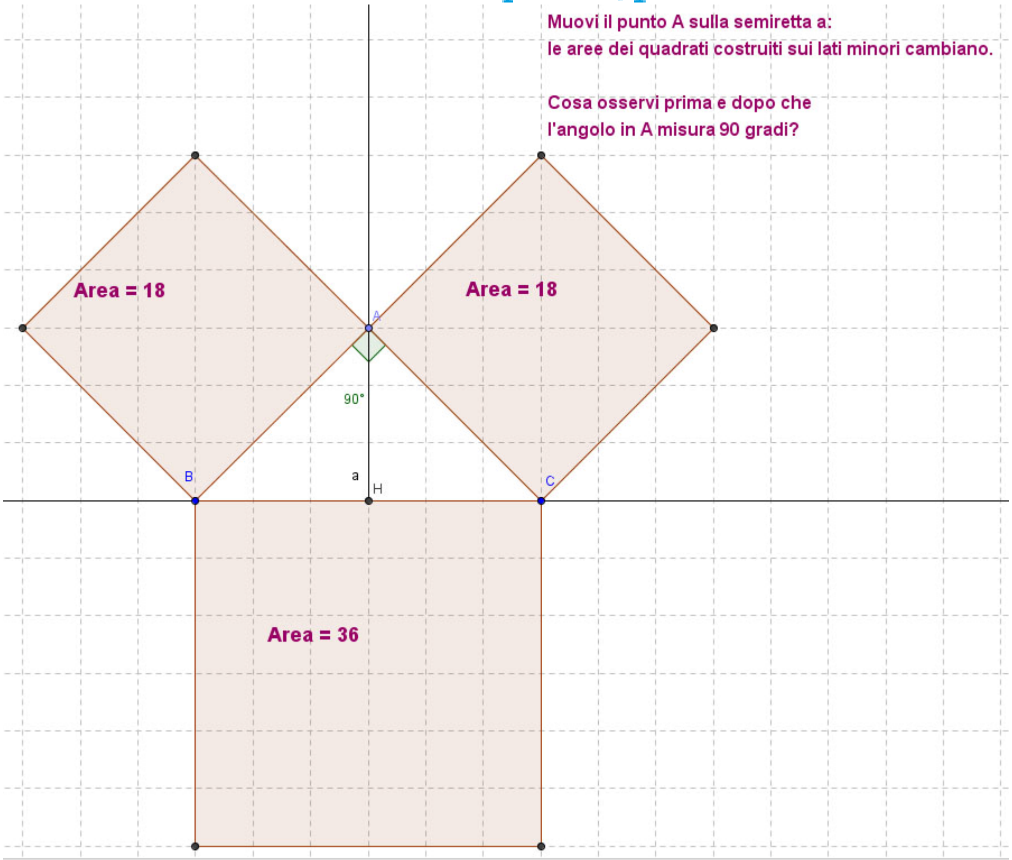
ma se il triangolo fosse acutangolo

$a^2 + b^2 > c^2$

e se il triangolo fosse ottusangolo

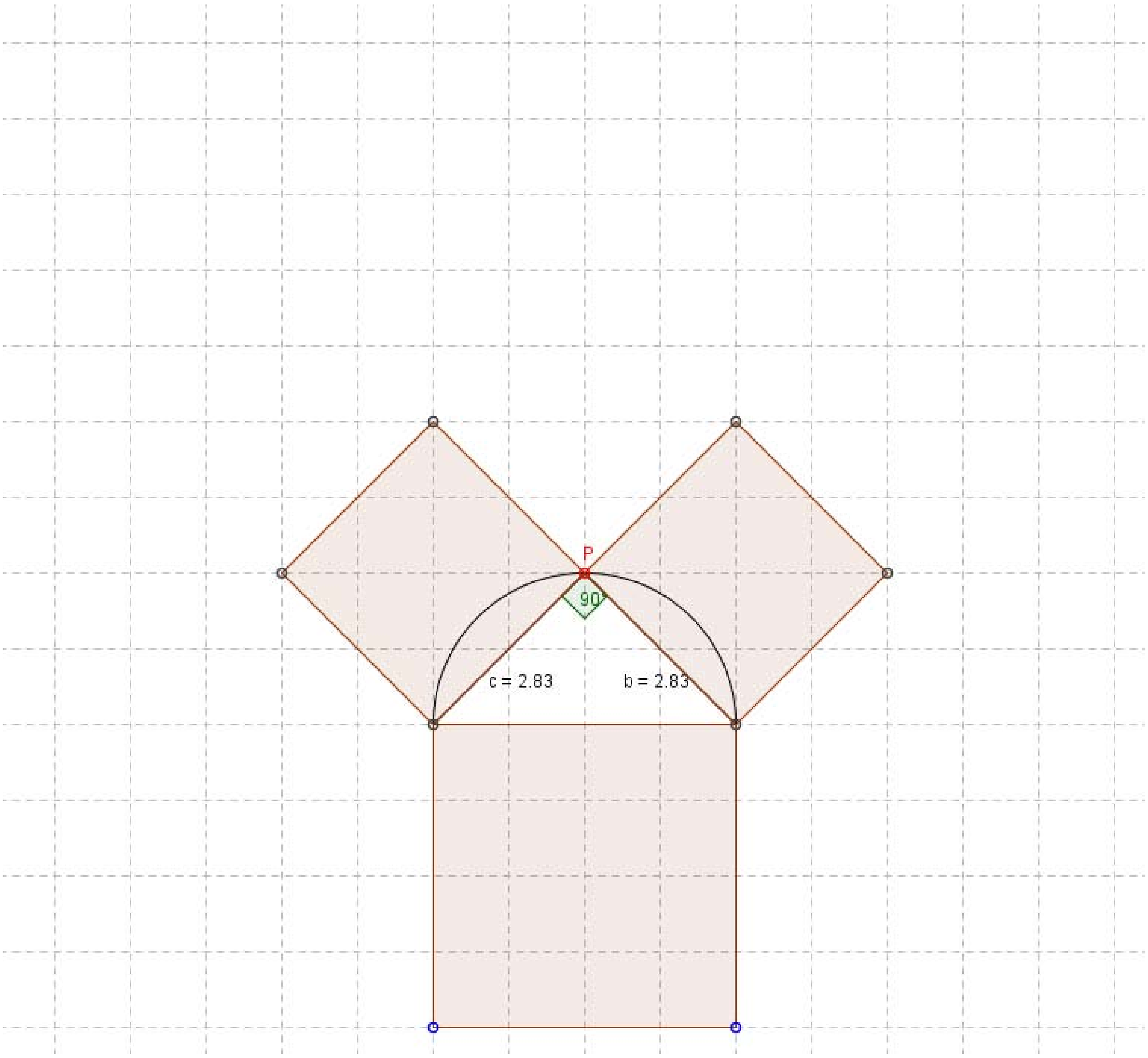
$a^2 + b^2 < c^2$.

L'uso di un software di geometria dinamica come Geogebra permette di mostrare dinamicamente quanto enunciato precedentemente.


Muovi il punto A sulla semiretta a:
le aree dei quadrati costruiti sui lati minori cambiano.
Cosa osservi prima e dopo che
l'angolo in A misura 90 gradi?
Area = 18
Area = 18
A
90°
B
a
H
C
Area = 36

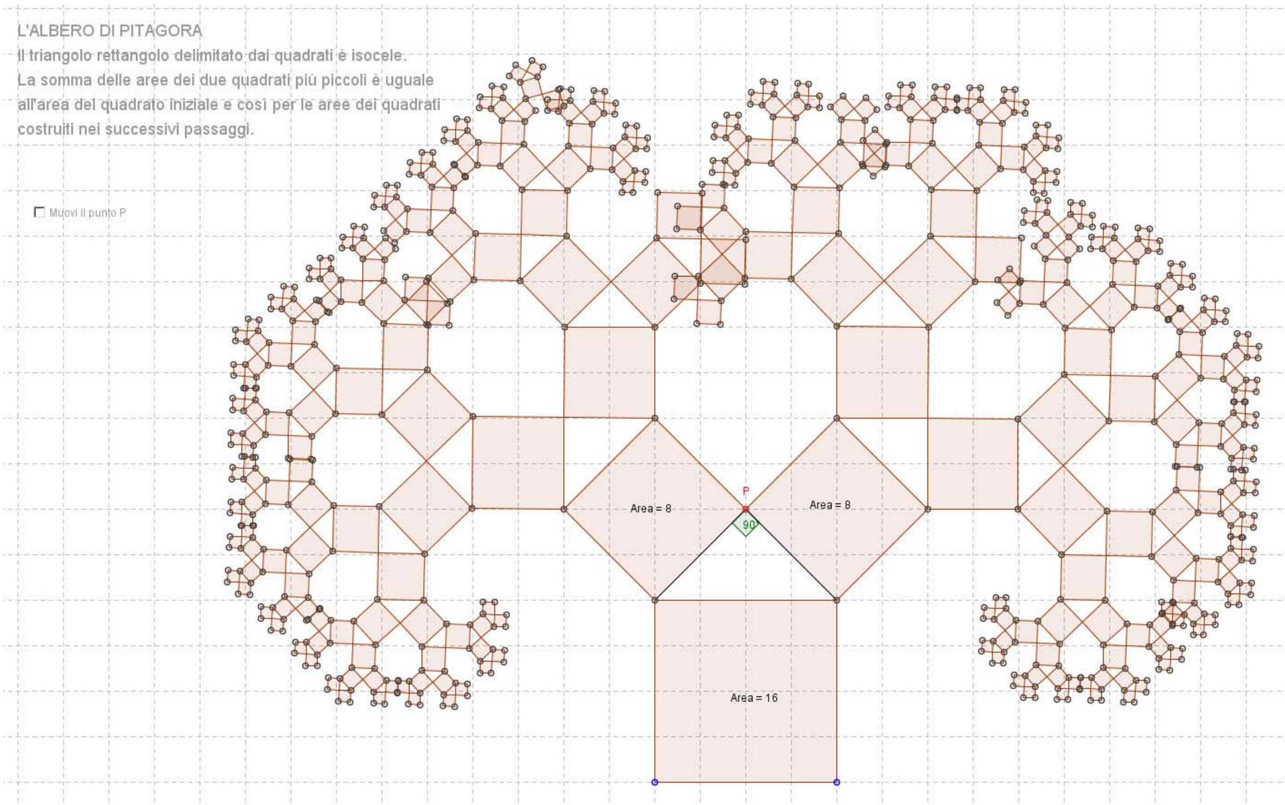
L’albero di Pitagora

Una delle costruzioni più importanti, legate alla relazione pitagorica, è l'albero di Pitagora, ottenuta a partire da un triangolo rettangolo isoscele su i cui lati si costruiscono i relativi quadrati. Nella costruzione effettuata con Geogebra si è definita una macro che a partire da un quadrato di base ne costruisce altri due nel modo evidenziato nella figura seguente.



In questo modo l'area del quadrato di partenza è uguale alla somma delle aree dei due quadrati.

Il procedimento viene iterato applicando la macro ai quadrati via via costruiti, senza cancellare le figure ottenute in precedenza, fino ad ottenere la seguente figura.



Si può avere un albero asimmetrico semplicemente costruendo un triangolo rettangolo qualsiasi sul lato del primo quadrato. L'albero di Pitagora non è un frattale in senso stretto ma costituisce un'interessante applicazione geometrica.

DAI TEST INTERNAZIONALI

Riportiamo nel seguito alcuni quesiti, inerenti gli argomenti affrontati nell'attività "Il teorema di Pitagora", e tratti dalla prove internazionali, si vuole in tal modo offrire un ambito di confronto tra quanto introdotto nella attività e i riferimenti a test internazionali.

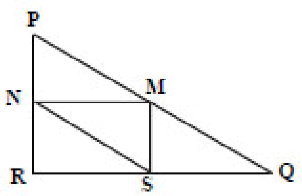
I quesiti che seguono sono tratti dalla prove PISA OCSE 2003 per i quindicenni. (http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2006.php?page=pisa2006_it_05)

Domanda 1: TRIANGOLI *M161Q01*

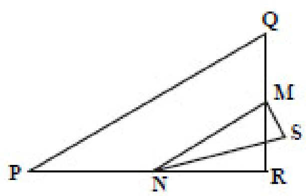
Tra le figure rappresentate qui sotto, cerchia l'unica che corrisponde alla descrizione seguente:

il triangolo PQR è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in R. Il segmento RQ è minore del segmento PR. M è il punto medio del segmento PQ ed N è il punto medio del segmento QR. S è un punto all'interno del triangolo. Il segmento MN è maggiore del segmento MS.

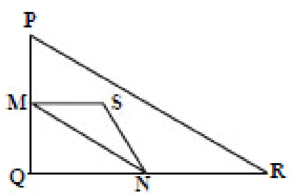
A



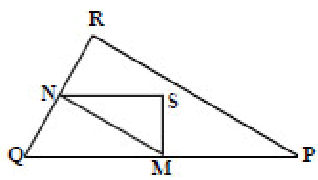
B



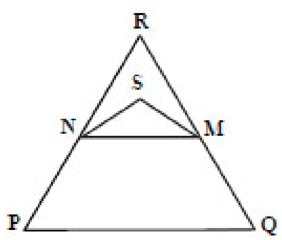
C



D



E



Una scuola di qualità, per tutti

Il quesito che segue è tratto dalla prova NAZIONALE 2008

http://www.invalsi.it/esamidistato/risultati/risfree.php
http://www.invalsi.it/esamidistato/risultati/Fascicolo1_Stampa.pdf
http://www.invalsi.it/esamidistato0809/
http://www.invalsi.it/esamidistato0809/documenti/Prova_nazionale_2009_matematica.pdf

C9. In una tavoletta babilonese del 1800 a.c. si legge il seguente quesito:
"Un bastone lungo 10 unità è appoggiato ad un muro (figura a). Poi, scivola di 2 unità (figura b). Di quante unità il piede del bastone si è allontanato dalla base del muro?".

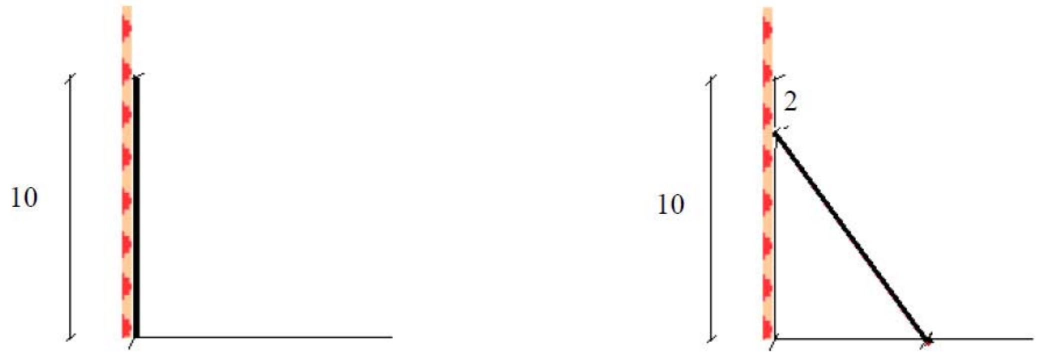
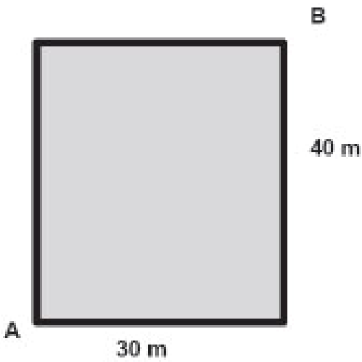


figura a figura b

A. 6 unità.
B. 8 unità.
C. 10 unità.
D. 12 unità.

D14. Nel disegno vedi un campo da calcetto di forma rettangolare.



Roberto e Elena si sfidano a una gara di corsa: partendo dall'angolo indicato nella figura con A devono arrivare all'angolo B. Roberto corre lungo il bordo del campo, mentre Elena corre lungo la diagonale del campo.

a. Quanti metri in più deve percorrere Roberto?

☐ A. 50

☐ B. 70

☐ C. 20

☐ D. 30

b. Scrivi il procedimento che hai seguito:

____

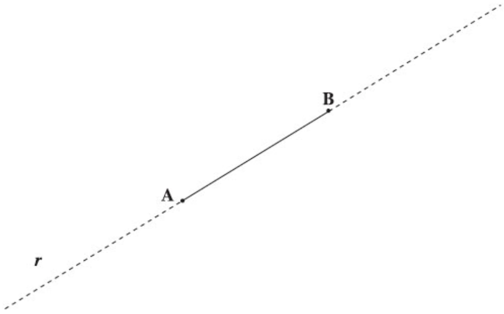
____

____

____

Esami primo ciclo 2010 INVALSI
http://www.invalsi.it/esamidistato0910/somministrazione/
http://www.invalsi.it/esamidistato0910/documenti/Fascicolo_Matematica.pdf .

D12. **Qui sotto vedi una retta *r* sulla quale sono segnati due punti A e B. Disegna un triangolo rettangolo ABC in modo tale che il segmento AB sia un cateto. Indica con una crocetta l'angolo retto del triangolo.**



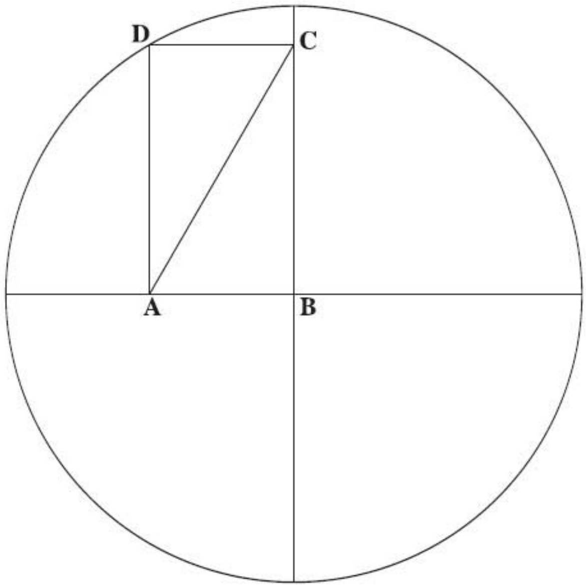
D20. **Il Signor Carlo scende dal tram all'incrocio di *via Pietro Micca* con *via Antonio Giuseppe Bertola* (nella mappa che vedi qui sotto il punto è contrassegnato da un asterisco).**

Percorre 200 metri di *via Bertola* e all'incrocio con *via 20 Settembre* svolta a sinistra; dopo aver camminato per 150 metri, raggiunge l'incrocio con *via Pietro Micca.* Da lì decide di tornare al punto di partenza per *via Pietro Micca.* Quanti metri all'incirca percorre al ritorno?

- ☐ A. 200 m
- ☐ B. 250 m
- ☐ C. 350 m
- ☐ D. 600 m

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

D23. La circonferenza in figura ha il raggio di 4 cm. ABCD è un rettangolo.



a. Qual è la lunghezza (in cm) del segmento $\overline{AC}$?

Risposta: ....

b. Giustifica la tua risposta:

....
....
....

Unione Europea FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI