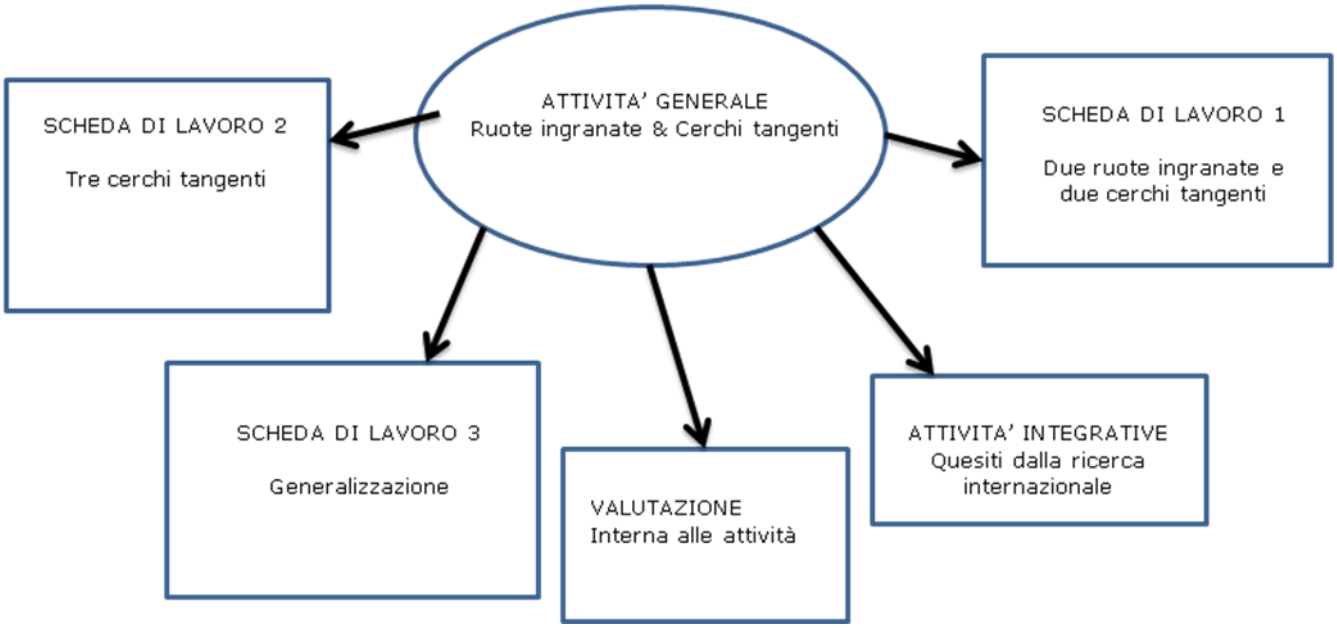
PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Ruote & Cerchi

Rossella Garuti

Nucleo: Spazio e Figure

PREREQUISITI
Nessun prerequisito specifico



FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Introduzione

Tematica: Enunciati, congetture e dimostrazioni. Condizioni di tangenza del cerchio.

Classe di riferimento: la proposta è per una classe seconda scuola primaria di primo grado. Non essendo previsti prerequisiti specifici potrebbe anche essere adeguata ad una classe prima. È comunque stata ampiamente sperimentata sia nella scuola primaria (con le dovute differenze) sia nella scuola secondaria di primo grado.

Finalità e obiettivi di apprendimento: la Geometria è spesso vista dai ragazzi come mero esercizio di calcolo di perimetri, aree e volumi e raramente ci si interroga sugli aspetti di proprietà geometriche come proprietà da utilizzare per costruzioni geometriche. È un aspetto della funzione culturale della Matematica che nella scuola secondaria di primo grado è troppo spesso lasciata in ombra perché reputata difficile e astratta. L'obiettivo non è quello di arrivare alla condizione di tangenza di due cerchi, ma di far sì che i ragazzi siano in grado di produrre congetture e di argomentare in modo rigoroso le congetture prodotte. Quindi l'attenzione è su questo aspetto e il fatto di aver scelto come contenuto matematico la condizione di tangenza di due cerchi è legata alla modellizzazione di due o più ruote dentate complanari ingranate fra loro. Il riferimento alle ruote è relativo al fatto che il cerchio può essere considerato una modellizzazione matematica della ruota. Il passaggio sarà quindi dal mondo reale (oggetti con ingranaggi e ruote dentate) al mondo matematico (cerchi tangenti).
All'interno di questa tematica emergono subito diversi problemi.

- **Il rapporto matematica-realtà**. Questo ha determinato la scelta di un campo di esperienza, i meccanismi e gli ingranaggi, tipicamente extramatematico. Gli ingranaggi, i meccanismi che li contengono e le figure che consentono una loro modellizzazione geometrica sono gli artefatti presi in considerazione in questo lavoro. La scelta di un contesto didattico ricco di oggetti concreti presenta limiti e vantaggi per l'attività matematica. Tra i limiti ricordiamo il pericolo che gli oggetti concreti inducano processi cognitivi di tipo quotidiano e non matematico. Tra i vantaggi osserviamo la potenzialità dell'esplorazione dinamica guidata della realtà come passo preliminare verso esplorazioni dinamiche mentali, fondamentali per lo sviluppo del ragionamento matematico.

- **Il rapporto teorico-empirico**. La matematica è parte della conoscenza teorica e, dunque, non può ridursi all'analisi anche attenta di dati o fenomeni. Il suo scopo è sempre, comunque, quello di inserire il nuovo in un sistema teorico esistente o, quando questo non è possibile, di costruire un sistema teorico nuovo. L'elemento caratterizzante l'attività è la tensione verso la costruzione di un sapere teorico. L'attenzione dell'attività proposta è su problemi di costruzione geometrica relativi a cerchi tangenti che modellizzano ruote dentate. Anche in questo caso l'obiettivo è quello di validare con ragionamenti generali le osservazioni fatte empiricamente.

Questa attività mostra come il campo d'esperienza degli ingranaggi consenta l'approccio precoce ai teoremi, con l'enunciazione di una teoria, la produzione di enunciati e la costruzione delle relative dimostrazioni. È chiaro che la transizione dalla matematizzazione alla costruzione di enunciati è un problema particolarmente delicato che, alla scuola del primo ciclo può essere solo avviato, anche se appare particolarmente utile che in questa fascia scolare si prepari il terreno.

L'attività si presta inoltre ad effettuare discussioni collettive di bilancio e produzioni di testi collettivi condivisi dalla classe di cui vengono portati alcuni esempi.

Obiettivi formativi

- Formulare ipotesi di carattere generale sostenendone la validità o la non validità attraverso l'argomentazione;
- produrre congetture su metodi generali di costruzione;
- giustificare questi metodi utilizzando elementi teorici precedentemente costruiti.

In generale tutta l'attività è focalizzata sul seguente processo cognitivo: *Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...).*
(Vedi QDR prove INVALSI http://www.invalsi.it/snv0910/)

Descrizione dell'attività

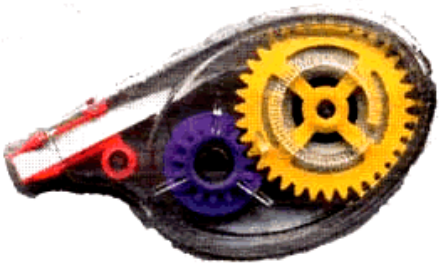
Si inizia con la prima attività che riguarda l'osservazione di un ingranaggio di uso comune (il bianchetto), dove sono presenti due ruote complanari ingranate. L'ingranaggio può essere modellizzato con due cerchi tangenti e si tratta di scoprire la condizione di tangenza di due cerchi. In queste prime attività si dà per scontato che i cerchi siano tangenti esternamente, per porre poi il problema di cerchi tangenti internamente (osservazione dell'ingranaggio presente nella centrifuga per l'insalata). In questa prima attività si arriva a definire la condizione di tangenza di due cerchi passando da un linguaggio comune a un linguaggio geometrico, sotto la guida dell'insegnante.
Nella seconda attività si pone un problema di costruzione complesso (il problema dei tre cerchi) e si richiede di risolverlo, di spiegare in generale un metodo di costruzione e di giustificarlo. È la fase che riguarda più direttamente l'acquisizione di forme tipiche del pensiero matematico. Le attività in gioco sono: COSTRUZIONE, METODO GENERALE E GIUSTIFICAZIONE.
Nella terza attività si chiede di generalizzare il problema dei tre cerchi a cerchi con misura del raggio a piacere.

Prerequisiti richiesti ai ragazzi per svolgere l'attività

Non è previsto nessun prerequisito specifico. I ragazzi conoscono alcune semplici proprietà del cerchio già dalla scuola primaria (ad esempio cos'è il raggio di un cerchio). Un requisito importante, che è anche obiettivo dell'attività, è di essere abituati a scrivere con cura i ragionamenti e i procedimenti.

Strumenti forniti agli allievi

Vengono forniti oggetti della vita quotidiana con ingranaggi. Per la prima attività sarebbe bene avere a disposizione un bianchetto (correttore a nastro) per ogni coppia di alunni e alcuni esemplari di centrifuga per l'insalata. Se non è possibile procurarsi diversi correttori ne può bastare qualcuno (due o tre) da tenere sulla cattedra in caso di necessità. Gli studenti dovrebbero avere il compasso a disposizione.



FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire INVALSI

Figura 1: oggetti con ruote dentate complanari

Organizzazione della classe e metodologia

Il lavoro dovrebbe essere svolto a coppie (omogenee o no a discrezione dell'insegnante). L'insegnante deve coordinare il lavoro delle coppie cercando di stimolare gli studenti a scrivere le loro osservazioni nel modo più accurato possibile, attraverso domande guida: perché hai scritto così? Cerca di spiegare meglio? Prova a spiegarlo a voce? Questa fase è molto importante perché i ragazzi hanno la tendenza ad arrivare frettolosamente ad un risultato senza riflettere sulle motivazioni. Lo scopo di questa attività è anche quello di abituarli ad un certo rigore e a descrivere i propri pensieri e passaggi. Compito dell'insegnante è anche quello di coordinare le discussioni sia di confronto dei prodotti degli allievi sia di "istituzionalizzazione": *cosa abbiamo scoperto? Condividiamo una soluzione comune* ecc. I ragazzi devono riportare sul loro quaderno le conclusioni di ogni attività in modo che ne resti traccia.

Fasi e tempi

L'attività si svolge in tre fasi che corrispondono a tre attività diverse. Tempo totale 10 ore senza le attività integrative.

Bibliografia

- Garuti R. (2009), Argomentare, congetturare e dimostrare alla scuola media, Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate Vol 32 A-B N6, 661-680.
- Su questo sito una descrizione completa dell'attività sulle ruote e ingranaggi effettuata in classi di ordine scolastico diversi http://didmat.dima.unige.it/set_modelli/index.html
- Bartolini M.G., Bergamini B., Betti B., Boni M., Ferri F., Fortini M., Monari F., Mucci A. & Garuti R. (1997), I campi di esperienza dei meccanismi e degli ingranaggi tra esperienza quotidiana, tecnologia e geometria, in Grugnetti L. (ed.), *Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria, Atti del II Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore*.

Attività 1
Due ruote ingranate & due cerchi tangenti

***Tipologia**:* attività individuale e a coppie. Didattica laboratoriale: attività individuale, alternata a discussione collettiva e ad attività di gruppo (coppie).

***Obiettivo didattico**:* lo scopo di questa attività è di analizzare oggetti di uso quotidiano che contengono ruote ingranate complanari e di modellizzarle attraverso cerchi tangenti.

***Tempo**:* 4 ore

Fase 1: Il correttore a nastro

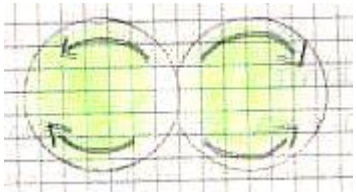
Il primo problema che viene posto è quello delle due ruote: descrizione del funzionamento del correttore a **nastro**.
L'insegnante propone ai ragazzi una scheda con l'immagine del correttore a nastro e con la seguente consegna individuale: *Descrivi come funziona il correttore. Come sono le ruote? Come girano? Puoi utilizzare schizzi e disegni*.
Lo scopo è quello di focalizzare l'attenzione sul funzionamento di due ruote ingranate complanari. Si deve arrivare a stabilire che **"due ruote ingranate complanari girano in versi opposti"**. È un primo enunciato di meccanica.
Il problema del correttore porta i ragazzi ad analizzare un ingranaggio costituito da due ruote ingranate esternamente complanari e di grandezza diversa. L'analisi è ampia: va dall'analisi del funzionamento dell'oggetto alla descrizione e al funzionamento del meccanismo. Per quanto riguarda il movimento delle ruote, la descrizione è a due livelli:

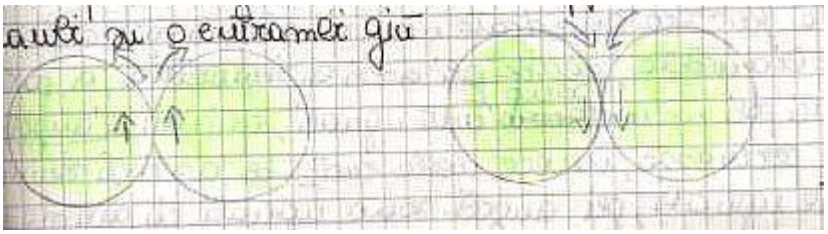
- locale: se l'osservazione riguarda i singoli denti "*…i denti vanno dall'alto verso il basso*";
- globale: se l'osservazione riguarda le ruote nel loro complesso "*...una in un verso e l'altra nell'altro*".

Nella costruzione del **testo collettivo** emergono gli elementi legati al funzionamento dell'ingranaggio e alla formulazione del postulato fondamentale, che viene giustificato dal punto di vista del funzionamento. Riportiamo un esempio di testo collettivo:

Come funziona il correttore

1. *Ci sono due ruote dentate ingranate fra loro. La ruota grande contiene il bianchetto, la ruota piccola raccoglie il nastro senza bianchetto. Il bianchetto esce dal basso verso l'alto, passa nella ruota piccola e si riavvolge.*
2. *L'ingranaggio è dato da due ruote dentate ingranate fra di loro: la grande gira in senso antiorario, la piccola in senso orario e raccoglie in nastro consumato.*
3. *Se due ruote dentate ingranano, allora girano sempre in versi opposti.*
4. *Se le ruote girassero nello stesso verso i denti si romperebbero. Quando le ruote girano in versi opposti i denti vanno nella stessa direzione: o tutti in su o tutti in giù. Se le ruote girassero nello stesso verso i denti di una andrebbero in giù e quelli dell'altra in su e l'ingranaggio non funzionerebbe.*
5. *Le due ruote sono di diversa grandezza e quindi hanno velocità diversa, se fossero uguali la velocità sarebbe la stessa. La ruota più piccola deve fare più giri della ruota grande.*





Le due immagini si riferiscono alla visione globale (tutta la ruota) la prima, e alla visione locale la seconda (i denti)

Fase 2: Il problema delle tre ruote

Si pone poi il problema di cosa succede se le ruote sono tre e ingranate l'una all'altra. Lo scopo di questa attività è quello di usare l'enunciato precedente per dimostrare che in questo caso il movimento non è possibile. L'aspetto centrale è la costruzione di questa semplice dimostrazione e delle argomentazioni utilizzate.
L'insegnante pone ai ragazzi la consegna: *Abbiamo analizzato il funzionamento di un ingranaggio con due ruote. E se le ruote fossero tre? In che modo potrebbero essere disposte? Che cosa accadrebbe? Giustifica con cura le tue ipotesi.*
Non sono presenti ruote in classe e i ragazzi possono aiutarsi con il disegno o con il ritaglio (ritagliando tre forme tonde). Lo scopo è quello di arrivare ad individuare le due possibili disposizioni delle tre ruote (a "fila" se le due ruote laterali ingranano solo con quella in mezzo, e a "collana" quando le tre ruote ingranano ciascuna con le altre due), di produrre ipotesi sul loro funzionamento e di giustificare le ipotesi prodotte. In particolare si dovrebbe arrivare ad osservare che:

a. **se tre ruote sono disposte "in fila" allora la prima e l'ultima girano nello stesso verso;**
b. **se tre ruote sono disposte "a collana" allora c'è un blocco: l'ingranaggio non funziona**.

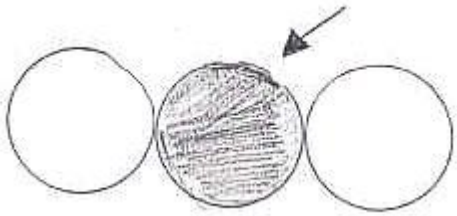
Nella fase successiva, dopo l'analisi dei prodotti individuali da parte dell'insegnante, si procede ad una discussione di bilancio sulle ipotesi prodotte dagli allievi. Lo scopo della discussione è di portare gli allievi che non hanno individuato il blocco a prendere in considerazione la disposizione "a collana" e di discutere le diverse argomentazioni prodotte dagli allievi sulle ipotesi di funzionamento. Importante non è solo l'individuazione delle due disposizioni, ma anche la struttura argomentativa utilizzata dagli allievi per giustificare le ipotesi.
Si procede poi alla costruzione di un testo collettivo che i ragazzi dovranno trascrivere sul loro quaderno.
Per quanto riguarda la struttura argomentativa, che giustifica le ipotesi prodotte, si possono osservare stili argomentativi differenti: in particolare si distinguono le argomentazioni di tipo "matematico" che fanno esplicito riferimento al postulato fondamentale: due ruote ingranate girano in versi opposti (protocollo 1), dalle argomentazioni di tipo "fisico" che fanno esplicito riferimento alla struttura materiale delle ruote (protocollo 2). Ecco due esempi:

Protocollo 1 - Argomentazioni di tipo matematico

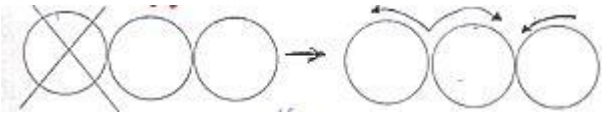
Abbiamo prima osservato il caso di due ruote e del verso di rotazione. Ora abbiamo un altro

problema. Quello di tre ruote ingranate! Dal postulato fondamentale (due ruote ingranate girano in versi opposti) possiamo ricavare altre ipotesi.

1. Se abbiamo tre ruote



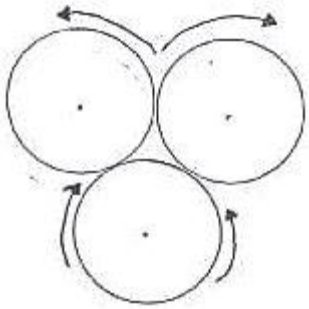
Prendiamo in considerazione quella in mezzo. Se gira in senso orario, allora quella di sinistra gira in senso antiorario. Immaginiamo di togliere la prima ruota, ora ne restano due e sapendo che la prima gira in senso antiorario ora vediamo la terza.



Se la seconda gira in senso orario allora la terza gira in senso antiorario (postulato fondamentale), quindi la prima e l'ultima girano nello stesso verso.

La struttura argomentativa di questo pezzo è esplicitamente di tipo matematico nel senso che fa riferimento a proprietà precedentemente verificate e assunte come vere.

2. Mettiamo le ruote in altro modo…. Ma cosa succede?

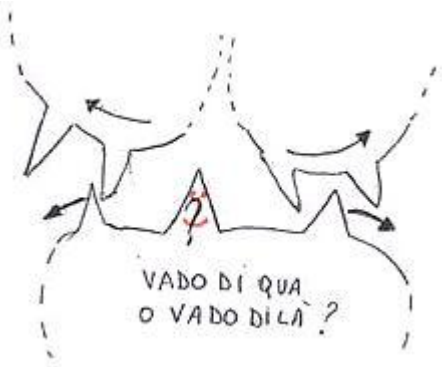


Se le due ruote in alto girano in senso opposto, la terza ruota non saprebbe dove andare e i denti si spezzerebbero. Se la ruota in basso girasse, vorrebbe dire che le due ruote in alto girano nello stesso verso, di conseguenza il postulato non sarebbe valido, ma questo è impossibile allora la ruota in basso non può girare.

La struttura argomentativa di quest'ultima parte è del tutto simile ad una dimostrazione per assurdo.

Protocollo 2 - Argomentazioni di tipo fisico

Le prime due ruote del disegno girano in senso opposto, ingranando; e fin qui andrebbe tutto bene, ma c'è anche una terza ruota che è ingranata a tutte e due e quindi è una specie di blocco e i denti si spezzerebbero. Succede tutto questo perché le due ruote vanno in senso contrario, e un dente spingendo contro un dente della ruota farebbe girare la ruota in un senso, ma c'è anche il dente dell'altra ruota che spinge nell'altro verso lo stesso dente. Conclusione: se le ruote sono messe in questo modo non possono girare.



L'argomentazione di questo allievo è tutta sulla natura materiale delle ruote.

Fase 3: Il problema dei cerchi secanti

La modellizzazione geometrica di due ruote ingranate esternamente richiede la costruzione di cerchi tangenti. Si pone ai ragazzi il problema di come rendere tangenti due cerchi secanti. Si tratta di un problema di costruzione che ha lo scopo di far emergere enunciati su cerchi tangenti esternamente che modellizzano ruote dentate ingranate esternamente.
Segue una discussione di bilancio sulle soluzioni prodotte dai ragazzi che ha lo scopo di far emergere le condizioni di tangenza di due cerchi e una verifica sulla comprensione delle condizioni di tangenza di due cerchi.

L'insegnante pone ai ragazzi un problema di costruzione relativo a ruote complanari che richiede di individuare il metodo per costruire due cerchi tangenti. Nel disegno della scheda sono presentati due cerchi secanti e viene richiesto di "aggiustare" la situazione. Si dovrebbe arrivare a stabilire che:

Se due cerchi sono tangenti allora il punto di tangenza è allineato con i centri e la distanza fra i due centri è uguale alla somma dei raggi.

Viceversa

Se ho tre punti A,B,C allineati, i cerchi con centro A e raggio AB e con centro C e raggio BC, sono tangenti in B.

(Condizione di tangenza di due cerchi tangenti esternamente)

Dal punto di vista adulto i due enunciati si equivalgono, ma per i ragazzi il senso è diverso. È importante osservare l'allineamento dei tre punti, poiché spesso è un elemento che sfugge anche a ragazzi più grandi ed "esperti".

Dopo la risoluzione individuale del problema si confrontano collettivamente i metodi utilizzati dagli allievi e si scrivono le condizioni di tangenza individuate. È prevista una verifica per vedere se le condizioni di tangenza di due cerchi sono state da tutti comprese.

COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2

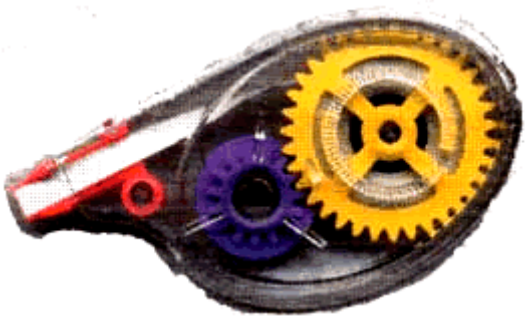
Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1
Due ruote ingranate & due cerchi tangenti

Fase 1: Il correttore a nastro

Materiali: per ogni coppia un correttore a nastro (o in alternativa due o tre a disposizione sulla cattedra).

Descrivi come funziona il correttore. Come sono le ruote? Come girano? Puoi utilizzare schizzi e disegni.



Domande guida:

- *Che forma hanno le ruote?*
- *Sono grandi uguali?*
- *Fanno lo stesso numero di giri? Perché?*
- *Cosa succede alle ruote quando il correttore è in funzione?*
- *Come girano le ruote?*

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1
Due ruote ingranate & due cerchi tangenti

Fase 1 bis: Analisi di ingranaggi in oggetti di uso comune

Materiali: portare in classe alcuni oggetti di uso comune con ingranaggi (apriscatole, cavatappi, frullino, campanelli di biciclette ecc.). Distribuire un oggetto per ogni gruppo di alunni.

Disegna l'oggetto a tua disposizione e spiega con cura come è fatto e come funziona.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1
Due ruote ingranate & due cerchi tangenti

Fase 2: Il problema delle tre ruote

Abbiamo analizzato il funzionamento di un ingranaggio con due ruote. E se le ruote fossero tre? In che modo potrebbero essere disposte? Che cosa accadrebbe? Giustifica con cura le tue ipotesi.

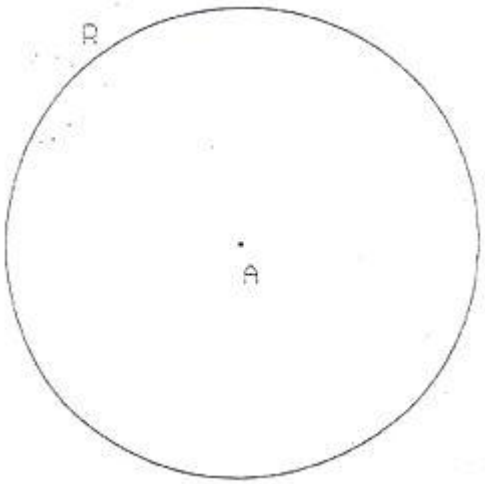
FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

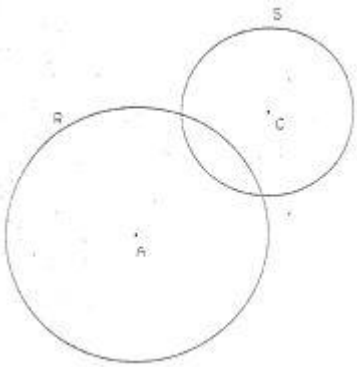
Attività 1
Due ruote ingranate & due cerchi tangenti

Fase 3: Il problema dei cerchi secanti

In una classe è stato dato il seguente problema:
Disegna una ruota S con il raggio di 3 cm che ingrani con la ruota R qui disegnata:



Uno studente, dopo alcuni tentativi, ha prodotto questo disegno:



però si è accorto che c'è qualcosa che non va.
Cosa c'è che non va? Prova a risolvere tu il problema e spiegagli ***bene*** *come aggiustare la figura.*

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1
Due ruote ingranate & due cerchi tangenti

Fase 3: Verifica

Materiali: riga e compasso.

Scheda di verifica

Disegna due cerchi di raggio 2 cm e 4 cm, tangenti nel punto K dato.
Spiega con cura come fai a costruirli e perché sei certo che i due cerchi siano tangenti.

.K

FONDI STRUTTURALI EUROPEI PON 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Attività 2
Tre cerchi tangenti

***Tipologia**:* attività individuale e a coppie. Didattica laboratoriale: attività individuale, alternata a discussione collettiva e ad attività di gruppo (coppie).

***Obiettivo didattico**:* lo scopo di questa attività è di risolvere un problema di costruzione geometrica. Si richiede la descrizione del metodo e la giustificazione.

***Tempo**:* 3 ore (una per il lavoro individuale, una per la discussione di bilancio e una per la costruzione del testo collettivo).

Fase 1: Il problema dei tre cerchi tangenti

Il problema proposto è un problema di costruzione: si tratta di costruire un cerchio (con raggio noto) tangente a due cerchi dati.
Lo scopo di questo problema è duplice: individuare un metodo generale di costruzione e produrre una giustificazione teorica del metodo, eventualmente basandosi sulla teoria prodotta nella situazione B sulle condizioni di tangenza di due cerchi.
Segue una discussione di bilancio con produzione di un testo collettivo.
Si deve arrivare a stabilire che:

Se il centro del cerchio disegnato è distante dal primo cerchio come la somma dei loro raggi e dal centro del secondo cerchio come la somma dei loro raggi, allora il cerchio disegnato è tangente agli altri due.

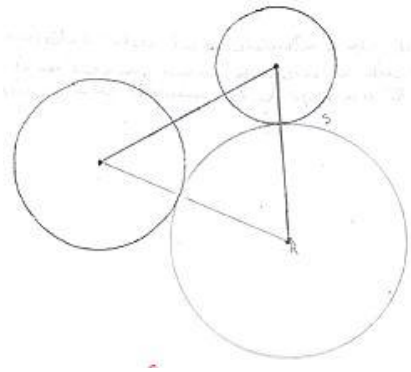
Dopo una attenta analisi dei prodotti degli allievi, l'insegnante seleziona alcune tipologie di soluzione e conduce una discussione di bilancio per focalizzare l'attenzione sulle diverse strategie di soluzione e sulle giustificazioni prodotte. Si arriva alla costruzione di un testo collettivo che riporta i metodi socialmente condivisi come corretti.
Il problema prevede tre livelli di complessità:

- la costruzione pratica;
- la spiegazione del metodo di costruzione;
- la sua giustificazione teorica.

Riportiamo tre esempi utilizzati nella discussione di bilancio:

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Protocollo 1 Canio



Ho aperto il compasso di 4 cm e ho cercato il punto adatto per poter combaciare i due cerchi con quello costruito dal sottoscritto. Ho unito i tre punti e ho trovato un triangolo.

Il mio metodo funziona perchè è stato fatto regolarmente, con tutti e tre i punti esatti.

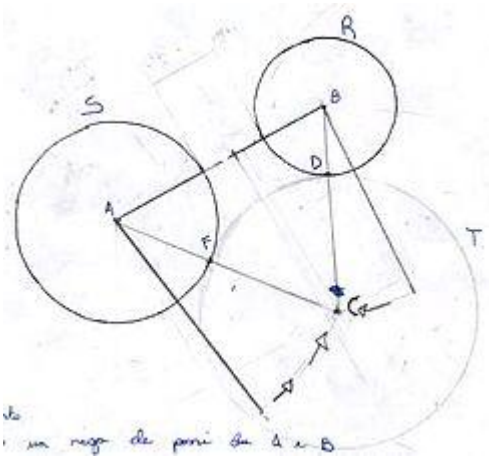
Procedimento per tentativi giustificato empiricamente.

Protocollo 2 Francesco

Procedimento

- *traccio una riga che passi da A e B;*
- *partendo da A traccio un raggio che si prolunga al di fuori della circonferenza lungo 7 cm (somma dei raggi);*
- *partendo da b traccio un raggio che oltrepassa la circonferenza che sia di 6 cm (somma dei due raggi);*
- *sposto i raggi fino a trovare il loro punto di incontro che poi sarà il centro del cerchio tangente.*

Il metodo si basa su considerazioni teoriche che però non si concretizzano nella soluzione con il compasso.



Il mio metodo funziona perché la misura dei due segmenti è uguale alla somma dei due raggi e i punti di tangenza sono allineati con i centri.

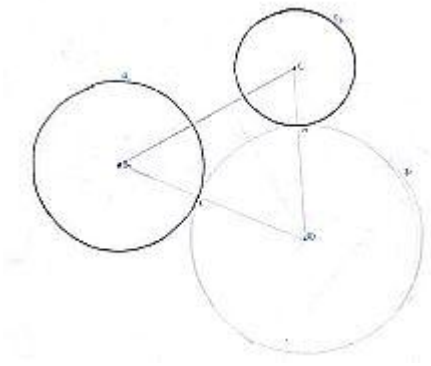
FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Protocollo 3 Elisa

Per disegnare un cerchio di raggio 4 tangente agli altri due ho proceduto in questo modo

- *ho unito con una retta A e C;*
- *punto in C e apro il compasso della lunghezza della somma dei raggi (2+4=6) e traccio un archetto;*
- *punto in C e apro il compasso della somma dei raggi (4+3=7) e traccio un arco che si incroci con quello di prima;*

trovo così il punto B che sarà il centro del cerchio che devo costruire.



Sono sicura che il cerchio che ho costruito è tangente perché AKB e CHB sono allineati e AK+KB=AB e CH+HB=CB

Costruzione geometrica giustificata utilizzando proprietà note.

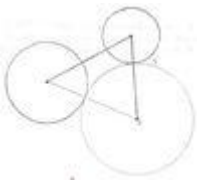
Si riporta un esempio di discussione di bilancio commentata con l'attenzione ai momenti cruciali della discussione:

Discussione di bilancio sul problema dei tre cerchi tangenti

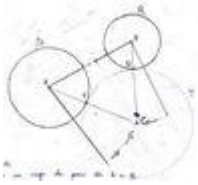
Nella prima parte della discussione vengono confrontati i metodi di Canio (per tentativi) e quello di Francesco (per tentativi ma con giustificazioni teoriche): entrambi dichiarano di aver usato un metodo per tentativi, ma l'uso di considerazioni teoriche in Francesco è esplicito e consapevole,mentre non lo è per Canio.

Stralcio di discussione 1

1. *P - Sono stati utilizzati metodi diversi ad esempio Canio ha usato un metodo… vuoi parlarne?*
2. *Canio - Io non ho usato un metodo, l'ho fatto a caso.*



3. P - sei sicuro?
4.Canio - Proprio a caso no, sono andato per tentativi sempre più vicino.
5. Simone - Ma quello non è un metodo, perché non dice esattamente cosa fare.
6. Francesco - Anch'io ho fatto per tentativi, ho aperto il compasso della somma dei raggi e spostavo le linee finché non si toccavano. Quando si toccavano quello era il centro del cerchio tangente.



7. P - Anche Canio apriva il compasso della somma dei raggi?
8. Canio - No, io non ci ho neanche pensato.
9. Annalisa - Francesco va per tentativi perché muove i raggi finché non si incontrano, però è diverso da Canio…

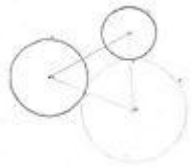
...
26. Giulio - Vorrei chiedere a Francesco se ha fatto la misura che esce dai cerchi di 4 perché 4 cm era il raggio?
27. Francesco - Io, sapendo che il cerchio che dovevo costruire doveva essere tangente agli altri due e il suo raggio era di 4 cm.. .io insomma sapevo che in due cerchi tangenti la distanza è uguale alla somma dei raggi.
…
30. Canio - Insomma lui in più di me sapeva che doveva venire la somma dei raggi.
31. Francesco - Solo che non sapevo come fare per trovare con precisione quel punto d'incontro…

Emerge poi, che molti ragazzi hanno disegnato per tentativi, in prima approssimazione il cerchio tangente, poi sono andati a cercare sul disegno elementi per l'individuazione di un metodo generale per la costruzione del cerchio tangente (40-48).

Stralcio di discussione 2

40. Giulio - Io subito ho fatto come Canio, per tentativi poi, una volta disegnato ho trovato il metodo.
41. Voci - Anch'io, anch'io…
42. P - Spiegate meglio.
43. Giulio - Ho fatto per tentativi, quando l'ho disegnato [il cerchio] ho collegato i tre centri e ho lavorato sulla lunghezza dei raggi.
44. P - Cosa vuol dire?
45. Giulio - Ho misurato e ho visto che erano 4+2 e 4+3, allora ho capito che c'entrava la somma dei raggi.
46. Annalisa - Io ho fatto uguale, però io ho usato il compasso.
47. P - In che senso?

48. Annalisa - Ho aperto il compasso tra i centri e ho misurato e ho visto che era la somma dei raggi e poi mi sono accorta che il punto nuovo doveva essere distante 7 dal primo centro e 6 cm dal secondo e allora ho pensato di usare il compasso prima da una parte e poi dall'altra per trovare quel punto.



È in questo momento che Francesco si rende conto di come poteva utilizzare il compasso (52-53). Nella fase successiva si esplicita il metodo per costruire il cerchio tangente. Infine un allievo riconosce nel metodo la costruzione del triangolo con il compasso.

Stralcio di discussione 3

52. P - Francesco ti dice niente, questo?
53. Francesco - Ecco come dare la giusta inclinazione ai due segmenti, col compasso!

Stralcio di discussione 4

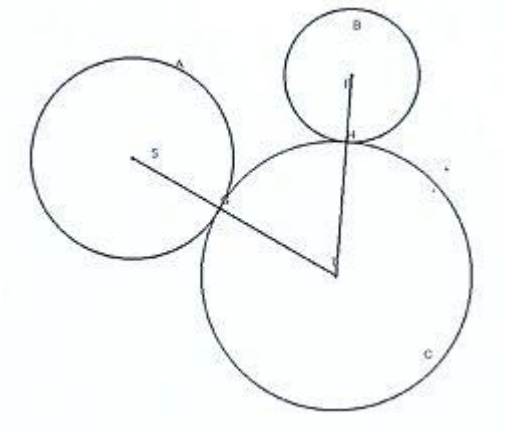
88. Federico - Io ho fatto come Sara e Annalisa però poi ho notato una cosa diversa... posso venire alla lavagna?
…
ho tracciato questa linea che va dal centro del cerchio dato al centro di quell'altro dato, poi ho cercato di trovare con le perpendicolari la metà, ma non andava bene, allora ho pensato che in Tecnica ci aveva fatto fare la costruzione dei triangoli con il compasso e allora ho visto che con i tre cerchi ho tre linee e che quindi si tratta di un triangolo.
89. P - In altre parole tu hai ricondotto il nostro problema a un altro problema: come trovare il terzo vertice di un triangolo avendo due lati e la misura del terzo lato.

Infine si riporta il testo collettivo costruito nella classe:

Testo collettivo sul problema dei tre cerchi:

METODO DI COSTRUZIONE
1 Apri il compasso di r+r1 e traccia un archetto puntando il compasso sul centro del primo cerchio.
2 Apri il compasso di r+r2 e traccia un archetto puntando il compasso sul centro del secondo cerchio.
3 Il punto di incontro è il cerchi del centro tangente.

FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire INVALSI

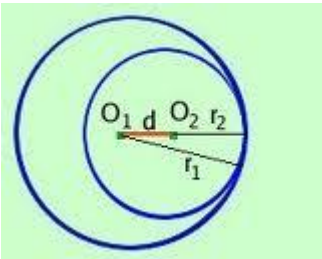


GIUSTIFICAZIONE
Il metodo funziona perché il centro del cerchio tangente ha una distanza dagli altri due centri uguale alla somma dei raggi.

ENUNCIATO
Se il centro del cerchio disegnato è distante dal primo cerchio come la somma dei loro raggi e dal centro del secondo cerchio come la somma dei loro raggi, allora il cerchio disegnato è tangente agli altri due.

Fase 2: La centrifuga per l'insalata

Lo scopo di questa attività è quello di definire la condizione di tangenza di due cerchi tangenti internamente. I ragazzi dovrebbero essere in grado di trasportare la conoscenza sulla condizione di due cerchi tangenti esternamente alla nuova situazione problematica. Alla fine ci sono due domande che rappresentano in qualche modo il "gioco" fra realtà e matematica: la prima riguarda l'aspetto fisico dell'ingranaggio. Perché è fatto così? Perché così è funzionale allo scopo? La seconda domanda riguarda la matematica.
Si arriva alla condizione di tangenza di due cerchi tangenti internamente.



Se due cerchi sono tangenti internamente allora il punto di tangenza è allineato con i centri e la distanza fra i due centri è uguale alla differenza dei raggi.

Viceversa

Se ho tre punti A,B,C allineati, i cerchi con centro A e raggio AC e con centro B e raggio BC, sono tangenti internamente in C.

FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

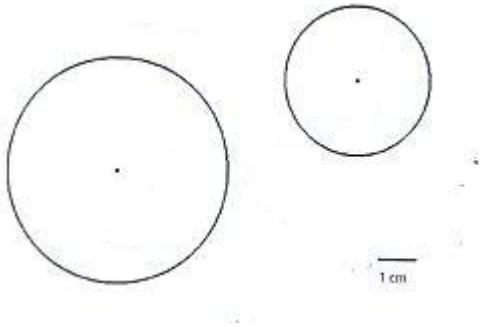
Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 2
Tre cerchi tangenti

Fase 1: Il problema dei tre cerchi

Scheda cerchi 2

Disegna un cerchio di raggio 4 cm tangente ai cerchi dati [sono disegnati due cerchi di raggi 2 cm e 3 cm, con distanza tra i centri di 7 cm].
Spiega chiaramente il metodo che usi in modo che altri possano usarlo.
Spiega con cura perché il metodo funziona.



Procedimento e giustificazione

FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 2
Tre cerchi tangenti

Fase 2: La centrifuga per l'insalata

Analizza il funzionamento dell'ingranaggio della centrifuga per l'insalata. Disegna poi utilizzando cerchi questo meccanismo.

Secondo te perché l'ingranaggio è fatto in questo modo?
Quali sono le condizioni di tangenza in questo caso?

Attività 3
Generalizzazione: E se…?

Tipologia: attività individuale e a coppie. Didattica laboratoriale: attività individuale, alternata a discussione collettiva e ad attività di gruppo (anche a coppie).

Obiettivo didattico*:* lo scopo di questa attività è di analizzare è di estendere il metodo scoperto nella fase due a cerchi con misure di raggi a piacere

Tempo*:* 2 ore

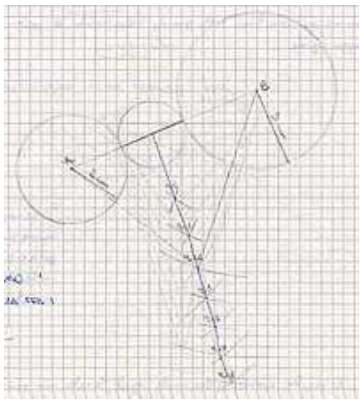
Fase 1: E se…?
L'obiettivo è la generalizzazione del problema delle tre ruote con lo scopo di produrre congetture in problemi di costruzione geometrica.
La situazione si apre con una scheda che pone il problema di costruire il cerchio tangente, a quelli dati con lunghezza del raggio scelto a piacere.
I ragazzi in genere cominciano disegnando il cerchio tangente di raggio minimo e poi disegnano gli altri. L'esplorazione può essere guidata chiedendo agli allievi:

- Esiste un cerchio di raggio minimo?
- Esiste un cerchio di raggio massimo?
- I centri dei raggi tangenti come sono disposti?

Per quanto riguarda la disposizione dei centri alcuni allievi si rendono conto che essi sono disposti su "una linea curva" (si tratta di un ramo d'iperbole), altri "vedono" i raggi su una linea retta, in particolare se i cerchi disegnati sono pochi la "curvatura" è poco evidente.

Ecco un esempio da uno studente:

Protocollo 1
Intanto comincio disegnando il cerchio che sta in mezzo, il raggio di questo cerchio sarà uguale alla distanza fra i centri, poi devo togliere i due raggi e poi dividere per due (r= AB-(r1+r2)/2) e questo è il più piccolo, perché se il raggio fosse ancora più piccolo il cerchio non toccherebbe gli altri due.
Invece se il cerchio ha un raggio più grande ne posso costruire infiniti, però vado fuori dal foglio.
I centri si trovano lungo una linea che "piega" verso il cerchio minore perché aumentando il raggio del cerchio tangente e facendo la somma dei raggi, il piccolo sarà sempre più piccolo rispetto al raggio che cresce sempre.

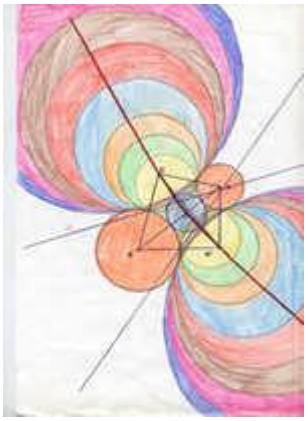


FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Fase2: Condivisione delle congetture prodotte e nuove congetture

Per portare tutti gli allievi a cogliere la possibilità di costruire infiniti cerchi tangenti e capire che i centri di questi cerchi sono disposti su una linea curva si fornisce ai ragazzi una scheda con la soluzione del problema costruita al computer (l'immagine è stata ottenuta utilizzando Cabrì Géometre, ma si può fare anche con Geogebra che è gratuito) nella quale si evidenzia il ramo d'iperbole. Vengono poi discusse le osservazioni degli allievi arrivando ad un enunciato generale.

Protocollo 2



I cerchi tangenti sono infiniti partendo dal più piccolo, situato tra i cerchi dati.

I centri dei cerchi tangenti formano una linea leggermente curva, l'iperbole.

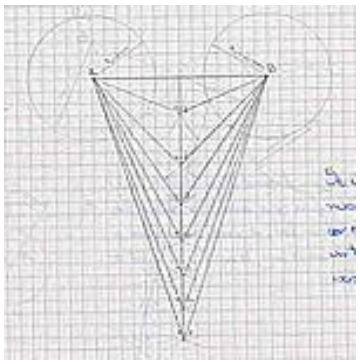
Produzione di nuove congetture

Il percorso può continuare chiedendo agli allievi *"Come devono essere i cerchi dati affinché i centri dei cerchi tangenti siano disposti su una linea retta?".*

I ragazzi in genere immaginano di "raddrizzare" la linea curva e si rendono conto che i due cerchi dati devono essere uguali. Se si ha a disposizione un software dinamico di geometria (ad esempio Cabrì Géometre o Geogebra) dalla figura generale si può ottenere questa configurazione particolare e discutere delle proprietà geometriche che si osservano (ad esempio alcune caratteristiche dei triangoli isosceli).

Protocollo 3

I centri stanno su una linea retta quando i due cerchi di partenza hanno il raggio uguale.



Se uniamo il nuovo centro con A e B viene un triangolo isoscele e la linea retta passa nel mezzo di AB

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 3
Generalizzazione

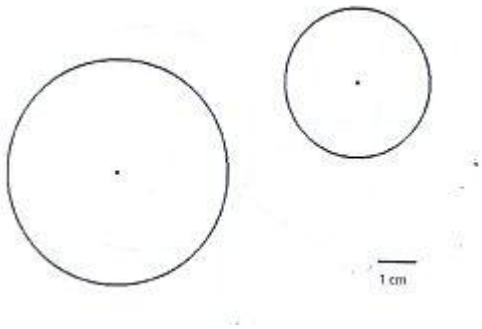
Fase 1: E se…?

Materiali: riga e compasso.

Con raggi di misura diversa, disegna cerchi tangenti a quelli dati [sono disegnati due cerchi di raggi 2 cm e 3 cm, con distanza tra i centri di 7 cm].

Secondo te si può scegliere un raggio di qualsiasi misura? Argomenta con cura la tua risposta.

Dopo aver disegnato alcuni casi fai una congettura sui centri dei raggi: secondo te hanno qualche proprietà interessante?



Spiegazione

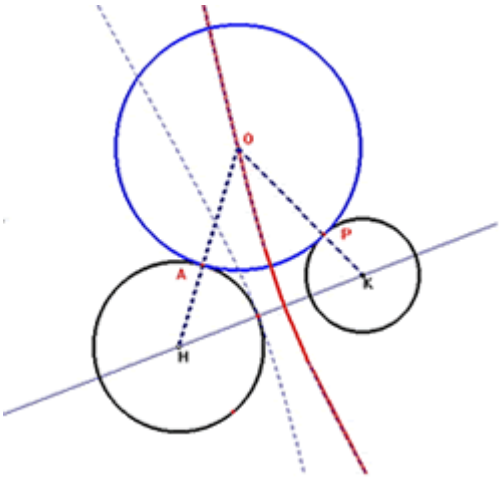
FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 3
Generalizzazione

Fase 2: Condivisione delle congetture prodotte

L'immagine è stata ottenuta al computer. Costruisci diversi cerchi tangenti a quelli dati che abbiano il centro sulla linea rossa. Scrivi le tue osservazioni.



Come devono essere i cerchi dati affinché i centri dei cerchi tangenti siano disposti su una linea retta?

Attività integrative
(Quesiti dalle ricerche nazionali e internazionali)

Si riportano alcuni quesiti presi dalla ricerca internazionale dove la modellizzazione matematica è presente in ambiti diversi (Numeri, Spazio e figure, Relazioni e Funzioni e Dati e Previsioni).

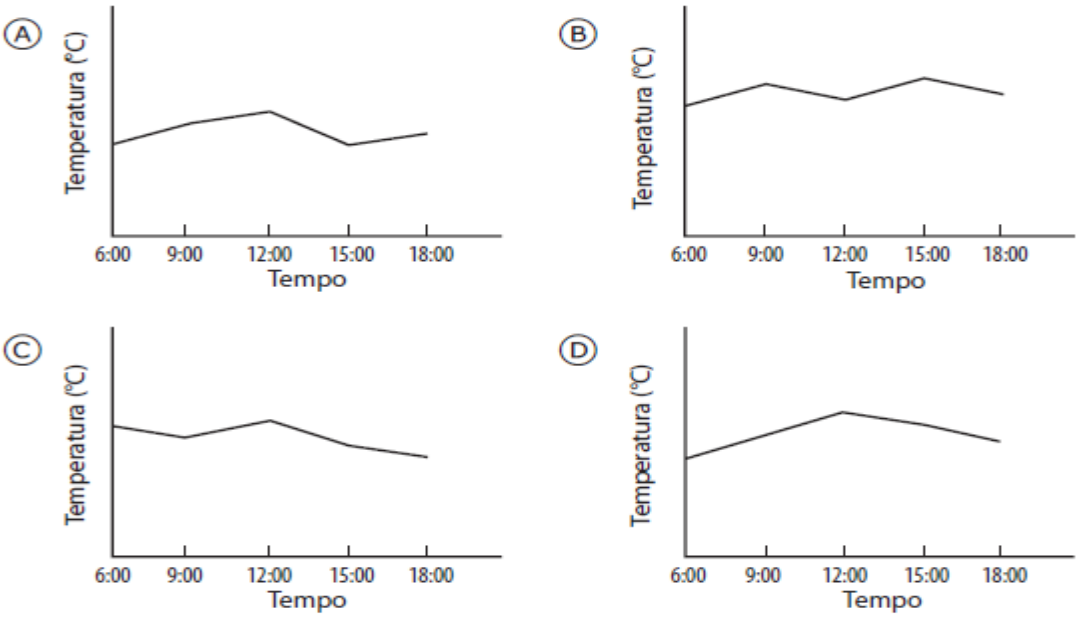
Quesiti di modellizzazione matematica

1. TIMSS 2007

La tabella riporta le temperature di un certo giorno registrate ad ore diverse.

Ora	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00
Temperatura °C	12	17	14	18	15

Si disegna quindi un grafico senza riportare la scala delle temperature. Quale, fra i seguenti, potrebbe essere il grafico che mostra le informazioni riportate nella tabella?

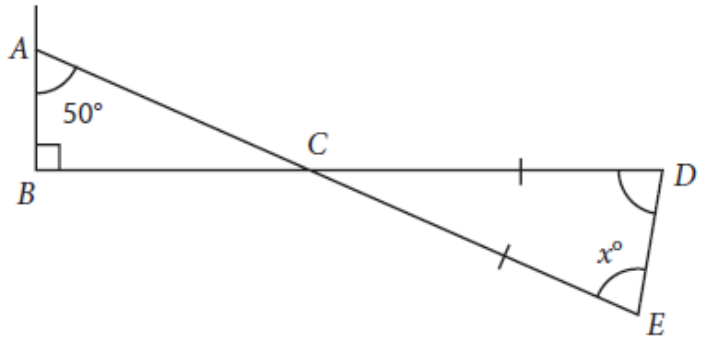


Problema di modellizzazione di un fenomeno fisico. Lo studente deve individuare il grafico corretto. Si può chiedere di spiegare con cura perché si escludono gli altri tre.

PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2010/2011
Una scuola di qualità, per tutti

2. TIMSS 2007

Nella seguente figura, $CD = CE$.



Qual è il valore di x?

Ⓐ 40

Ⓑ 50

Ⓒ 60

Ⓓ 70

Quesito geometrico. In questo caso è importante chiedere di spiegare i passaggi che portano alla risposta scelta. Quali informazioni abbiamo dalla figura? Che ragionamento possiamo fare?

Unione Europea FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

PN INVALSI 2009-2010

D20. Il Signor Carlo scende dal tram all'incrocio di *via Pietro Micca* con *via Antonio Giuseppe Bertola* (nella mappa che vedi qui sotto il punto è contrassegnato da un asterisco).

Percorre 200 metri di *via Bertola* e all'incrocio con *via 20 Settembre* svolta a sinistra; dopo aver camminato per 150 metri, raggiunge l'incrocio con *via Pietro Micca.* Da lì decide di tornare al punto di partenza per *via Pietro Micca.* Quanti metri all'incirca percorre al ritorno?

- ☐ A. 200 m
- ☐ B. 250 m
- ☐ C. 350 m
- ☐ D. 600 m

Risolvi il seguente quesito senza utilizzare il Teorema di Pitagora

Per l'insegnante:

- *La risposta A non è possibile perché avrei l'ipotenusa uguale a un cateto.*
- *La risposta C, 350 m e la risposta D, 600 m, sono da escludere perché il un triangolo un lato deve sempre essere minore della somma degli altri due, quindi l'ipotenusa deve essere minore di 350m. Nel caso C avrei un triangolo degenere cioè una linea.*