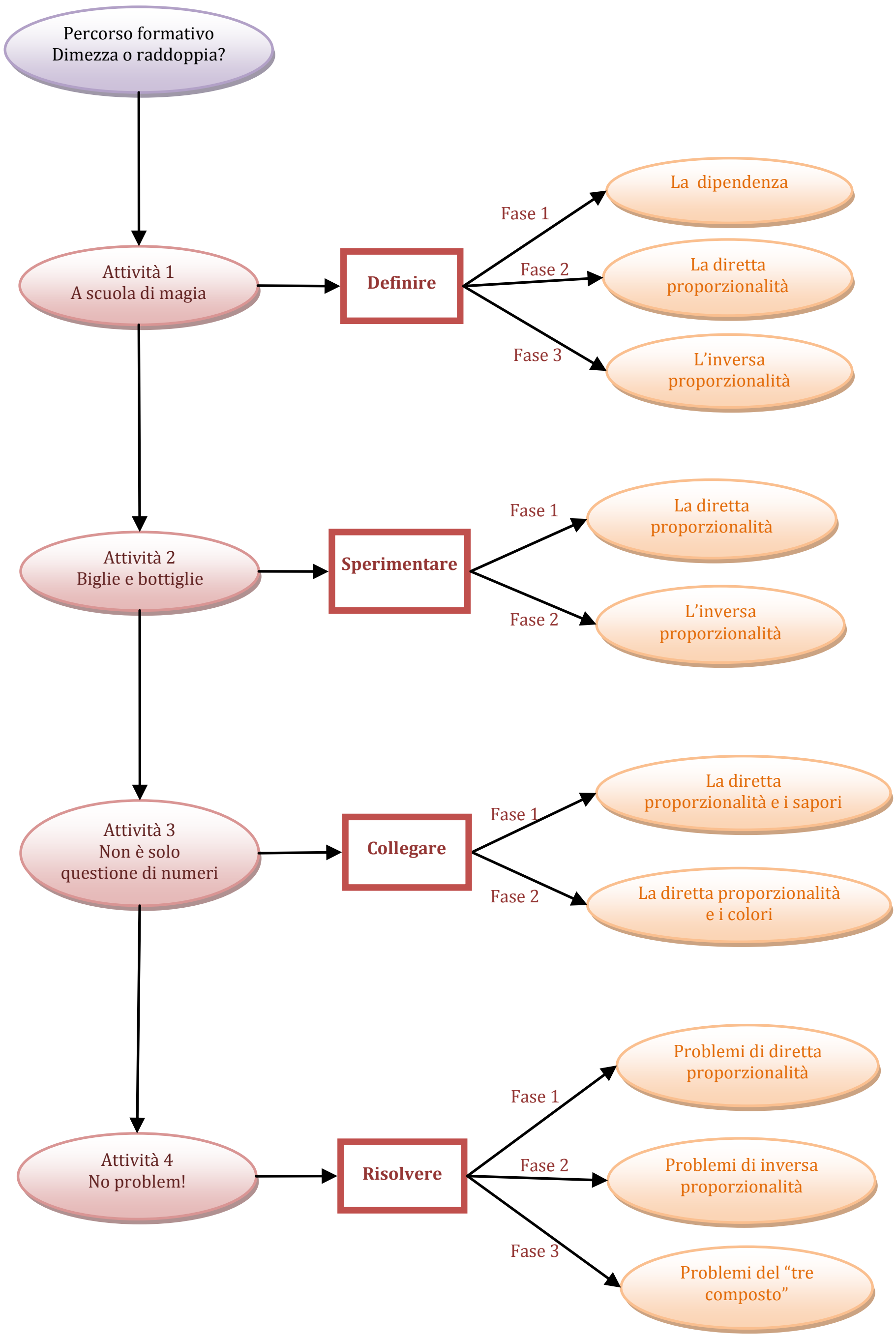
PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2011/2012
Una scuola di qualità, per tutti

Dimezza o raddoppia?

Emiliano Barbuto

Nucleo: Relazioni e funzioni



Introduzione

Tematica:
L'elemento che caratterizza principalmente il percorso formativo è lo studio della proporzionalità diretta e inversa. L'approccio a questa problematica avviene sotto due punti di vista: affrontando situazioni problematiche con risvolti pratici e conducendo semplici esperienze scientifiche che coinvolgono grandezze in relazione tra loro. La diretta e l'inversa proporzionalità sono anche lo spunto per introdurre la differenti rappresentazioni di una funzione (numerica, grafica e simbolica).

Finalità e obiettivi formativi:
Il percorso didattico è rivolto ad alunni delle classi seconde o terze della scuola secondaria di primo grado ed è suddiviso in quattro attività, composte da due o tre fasi. Ciascuna attività è incentrata intorno ad un'azione (scopo) da compiere: definire la proporzionalità, sperimentare la proporzionalità, collegare la proporzionalità a fenomeni naturali, adoperare la proporzionalità per risolvere situazioni problematiche.

Obiettivi strettamente legati alla tematica principale del percorso formativo sono i seguenti:
- Identificare la relazione di proporzionalità esistente tra grandezze in contesti pratici (attività 1);
- Conoscere le caratteristiche principali di un legame di diretta e inversa proporzionalità tra grandezze (attività 1);
- Legare il concetto di proporzionalità tra grandezze alla prevedibilità del loro andamento (attività 1);
- Rappresentare grandezze direttamente o inversamente proporzionali in forma numerica, grafica e simbolica (attività 2);
- Saper operare il passaggio da un tipo di rappresentazione ad un altro tipo di rappresentazione (attività 2);
- Comprendere che la diretta o inversa proporzionalità tra grandezze non si riflette solo su rapporti numerici, ma può avere anche evidenti ripercussioni su aspetti sensoriali come la vista o il gusto (attività 3);
- Saper decodificare situazioni problematiche più o meno complesse in termini di proporzionalità e risolverle numericamente (attività 4);

Obiettivi formativi di ordine più generale (trasversali) sono i seguenti:
- Favorire lo sviluppo di un linguaggio scientifico corretto, preciso ed usato in modo proprio (attività 1);
- Apprendere come applicare il metodo scientifico galileiano (induttivo/deduttivo) con semplici esperienze di laboratorio (attività 2);
- Imparare ad usare il foglio elettronico come strumento semplice ed immediato per svolgere calcoli o per passare da una rappresentazione dei dati ad un'altra (attività 2);
- Sperimentare la tecnica di riduzione (scomposizione) di un problema complesso in due o più problemi semplici studiati in precedenza (attività 4 – fase 3);

Gli obiettivi verranno perseguiti mediante una impostazione metodologica che ha i seguenti fondamenti:
- La didattica imperniata sull' "imparare facendo" (learning by doing) e sul confronto tra pari (alunno con alunno).
- L'evoluzione della figura del docente, che non è più impegnato in una didattica frontale, ma che svolge il ruolo di mediatore di processi formativi, stimolando i meccanismi cognitivi, veicolando informazioni, moderando le discussioni tra pari e con il docente.
- L'uso della pratica di laboratorio (scientifico o informatico) per fornire agli studenti riscontri pratici degli argomenti presentati, calibrando adeguatamente la componente formale, simbolica e algebrica dei contenuti.
- Il passaggio graduale dal lavoro in gruppi o coppie al lavoro individuale, in vista delle verifiche finali.

Descrizione del modulo

Condizione, problema o stimolo da cui nasce l'attività

La proporzionalità è un argomento che spesso prelude allo studio delle proporzioni. Per tale motivo la proporzionalità rischia di essere introdotta in maniera funzionale allo studio delle proporzioni e di essere "fagocitata" da questa seconda tematica, che spesso è carica di formalismi, notazioni e calcoli più o meno complessi. Pertanto, si è avvertita la necessità di scindere tale argomento dallo studio delle proporzioni tra numeri e focalizzare l'attenzione sulle implicazioni che esso ha nello studio dei fenomeni naturali, sulla sua potenza descrittiva e predittiva e sulla possibilità di applicarlo nella risoluzione di situazioni problematiche, senza l'obbligo di utilizzare il formalismo delle proporzioni, ma semplicemente schematizzando sequenze di operazioni che si traducono in procedimenti risolutivi.
Il secondo stimolo raccolto in questa attività è la necessità di familiarizzare con le diverse rappresentazioni di dati (numerica, grafica e simbolica). A tale proposito si forniscono allo studente gli strumenti necessari ad identificare una proporzionalità (diretta o inversa) in ciascuna di queste rappresentazioni.

Prerequisiti richiesti ai ragazzi per svolgere l'attività

Il percorso formativo può essere affrontato da alunni che abbiano semplicemente dimestichezza con la terminologia descrittiva delle tabelle (righe, colonne, celle) e siano padroni delle quattro operazioni fondamentali (in particolare le moltiplicazioni e le divisioni). Per affrontare la rappresentazione grafica della diretta e dell'inversa proporzionalità potrebbe essere necessario il concetto di coordinate in un sistema di assi cartesiani ortogonali. Tuttavia, il docente può decidere di affrontare il percorso formativo, anche senza aver presentato in anticipo tale concetto (peraltro molto intuitivo). Difatti esso viene proposto operativamente, adoperando il foglio di calcolo. Come ribadito in precedenza, non si affronta volutamente il concetto di proporzione e tutto il suo formalismo algebrico. In tal modo, anche le classi che non hanno ancora affrontato i calcoli algebrici in modo esauriente possono avvicinarsi a questo percorso formativo. Nelle esperienze di laboratorio si farà riferimento a concetti come il peso e la capienza (anche questi molto intuitivi) che il docente può chiarire durante lo svolgimento stesso dell'attività.

Strumenti forniti agli allievi

Per l'attività 1 sono fornite tre schede per lo studente da compilare in classe.
L'attività 2 è di tipo laboratoriale; per il suo svolgimento si prevede l'uso di schede per lo studente e di materiali per la messa a punto delle esperienze di laboratorio (bottiglie di varia capienza, recipienti, acqua, biglie di vetro e bilance). In base al numero di strumenti disponibili si formeranno dei gruppi.
Anche l'attività 3 è di tipo laboratoriale; per il suo svolgimento si prevede l'uso di schede per lo studente e di materiali per la messa a punto delle esperienze di laboratorio (recipienti, acqua, bicchieri, sciroppi e succhi di frutta).
Per l'attività 4 sono fornite nuovamente delle schede per lo studente.

Metodologia e organizzazione della classe

Per la prima attività la classe viene suddivisa in gruppi da tre o quattro studenti. Ciascun gruppo compila le tre schede. Alla fine della compilazione di ciascuna scheda è prevista una discussione collettiva tra docente ed alunni. Il docente raccoglie le osservazioni degli studenti e stimola la discussione, talvolta formulando delle osservazioni, talvolta veicolando informazioni supplementari. Durante tale discussione prende nota dei punti critici emersi a livello cognitivo e delle dinamiche sviluppatesi a livello di gruppo e di interazione tra pari.
Anche la seconda e la terza attività sono svolte da gruppi di tre o quattro studenti. Ciascun gruppo di studenti deve mettere a punto la propria esperienza in laboratorio e deve compilare la scheda per lo studente. In alternativa, se vi è scarsità di materiali da fornire agli studenti, è possibile mettere a punto una sola esperienza, condotta dall'insegnante che coinvolgerà a turno gli alunni. In questo caso, la scheda per lo studente può essere compilata da coppie di alunni. Le attività

terminano con una discussione collettiva, simile per contenuti e obiettivi a quella della prima attività.
Per la quarta ed ultima attività si riorganizzano gli studenti a coppie. Anche in questo caso il docente guiderà la riflessione collettiva finale, facendo tesoro dei punti di forza e delle criticità che sono emerse dalla discussione.
La verifica finale va somministrata assicurandosi che ciascuno studente lavori singolarmente. Agli studenti che avranno ottenuto nella verifica finale un risultato al di sotto degli obiettivi cognitivi minimi, verrà somministrata una attività di recupero, mentre per quegli studenti che avranno ottenuto un risultato sufficiente può essere proposta l'attività di rinforzo. Infine, per gli studenti che hanno mostrato notevoli capacità ed hanno ottenuto un risultato soddisfacente nella verifica, può essere proposta l'attività di approfondimento, di carattere laboratoriale.

Fasi e tempi
La seguente tabella riporta nel dettaglio i tempi stimati per ogni fase di ciascuna attività e per le verifiche conclusive.

Attività	Fase	Tempo
1 – A scuola di magia	1	1 h
	2	1 h
	3	1 h
2- Biglie e Bottiglie	1	1,5 h
	2	1,5 h
3 – Non è solo questione di numeri	1	1 h
	2	1 h
4 – No problem!	1	1 h
	2	1 h
	3	1 h
5 – Verifica		1,5 h
6 – Attività di recupero/rinforzo/approfondimento		1,5 h
Totale		14 h

Bibliografia

Barbuto, E. (2007). *Logica numerica. 400 quiz di logica su probabilità, proporzioni, percentuali, serie numeriche, matrici… ed altri rompicapo.* Edises, Napoli 2007.

Barbuto, E. (2011). *Matematica_1. Insiemi numerici, algebra letterale, equazioni, sistemi e geometria euclidea.* Edises, Napoli 2011.

Per le immagini nel documento:
Pag. 1: Mappa concettuale elaborata dall'autore
Pag. 9, 10 e 12: Raccolta ClipArt Microsoft
Pag. 15 e 16: Cattura dello schermo di una cartella di lavoro MS Excel realizzata dall'autore
Pag. 10: Rielaborazione di ClipArt Microsoft convertita in Oggetto MS Office realizzata dall'autore

Attività 1 – A scuola di magia

Indicazioni per il docente

Tipologia: Attività preliminare di tipo esplorativo, suddivisa in tre fasi. In ciascuna fase, viene introdotta una breve storia e viene distribuita una scheda di lavoro che gli studenti compileranno in gruppi di tre o quattro unità. Alla fine di ciascuna fase si sviluppa una discussione collettiva, stimolata dagli interventi del docente.

Obiettivo didattico: Sviluppare un linguaggio scientificamente corretto per descrivere l'andamento di grandezze direttamente e inversamente proporzionali; legare il concetto di proporzionalità tra grandezze alla prevedibilità del loro andamento; riuscire ad individuare grandezze direttamente ed inversamente proporzionali decodificando una situazione problematica mediante rappresentazioni tabellari (numeriche) dei dati; stabilire le caratteristiche della diretta proporzionalità e delle inversa proporzionalità tra due grandezze.

Tempo: 3 ore

Fase 1
Il docente legge insieme agli studenti il racconto presentato nella scheda per lo studente. In tale racconto vengono introdotte due grandezze (numero totale di anelli e tempo totale di produzione). La prima parte del racconto e le due parti successive possono essere introdotte anche mediante la presentazione multimediale (file attività_1.pptx oppure file attività_1.ppt).
Gli alunni sono invitati ad estrarre dalla storia narrata i valori delle grandezze presentate compilando la tabella (punto 1.1). Nel punto 1.2 gli studenti sono invitati a riflettere sull'andamento delle grandezze riportate in tabella, mentre il punto 1.3 chiede loro se è possibile formulare una previsione su quanto non viene espressamente riportato nel racconto. Conclusa la compilazione delle schede, inizia una discussione collettiva nella quale porre attenzione ai seguenti aspetti:

- **La terminologia usata dagli studenti**. Gli studenti dovrebbero intuire senza grande difficoltà che il numero di anelli prodotti nella singola ora diminuisce (decresce) di ora in ora. Qualcuno giustificherà questa sua osservazione riferendosi ai numeri: "Osservo che al passare delle ore il numero di anelli prodotti è sempre più basso (piccolo)". Altri forniranno anche una giustificazione causale: "Markus è sempre più stanco". Sarà facile individuare anche che il numero totale di anelli prodotti aumenta (cresce) all'aumentare del numero di ore trascorse. Anche in questo caso vi saranno allievi che forniscono per tale osservazione una giustificazione numerica. In questa fase è importante porre attenzione al linguaggio adoperato dagli studenti: usano termini colloquiali oppure adoperano, anche se in parte, una terminologia più precisa, di tipo scientifico? Pertanto, può essere indicato introdurre la terminologia che più correttamente esprime valutazioni di tipo scientifico. Il docente spiegherà che è meglio utilizzare verbi come "crescere" o "decrescere", utilizzati spesso in ambito matematico, oppure "aumentare" o "diminuire", "ridurre" o "ingrandire" che sono termini di uso più generale, ma che ci danno maggiori informazioni rispetto a verbi come "cambiare" o "variare". Analogamente, si porrà l'accento sul fatto che aggettivi come "maggiore", "minore", "alto", "basso" sono più specifici e corretti di "grande" e "piccolo".
- **Il tasso di prevedibilità che gli studenti attribuiscono alla situazione descritta**. Alcuni alunni probabilmente risponderanno che nella quinta ora Markus può produrre 3, 2 oppure 1 anello. Queste saranno osservazioni dettate dall'intuito e dall'osservazione che il numero di anelli prodotti in un'ora diminuisce (decresce). Se gli alunni hanno dato una risposta secca ed arbitraria che tiene conto della decrescita (ad esempio hanno risposto 2), allora il docente può far notare che la risposta data è arbitraria, in quanto gli anelli prodotti potrebbero essere anche 3 oppure 1. Un ulteriore tentativo di stima potrebbe realizzarsi nel sostenere che sicuramente Markus produrrà un numero di anelli da 1 a 3. Anche questa è una previsione, sebbene non precisa. Il docente dovrebbe quindi far notare agli alunni che Markus, esausto dopo quattro ore di lavoro, potrebbe decidere di fermarsi per un'ora e produrre zero anelli nella quinta ora, oppure lo stesso Markus, potrebbe aver lavorato più lentamente durante la terza e la quarta ora per conservare energie ed accelerare la

produzione nella quinta ora e produrre magari 5 anelli. È importante che gli studenti capiscano che qualsiasi valore assegnano al numero di anelli prodotti durante la quinta ora è una scelta arbitraria e discutibile. Potrebbe risultare utile introdurre il concetto di regolarità, ovvero il numero di anelli prodotti non si ripete regolarmente di ora in ora.

- **Le motivazioni addotte dagli studenti per ritenere la situazione presentata prevedibile o imprevedibile**. Non si è pertanto in grado di far alcuna stima sul numero di anelli prodotti nella quinta ora. Anche in questo caso occorre porre attenzione sui termini che gli studenti utilizzano per giustificare a torto o a ragione la possibilità di predire il numero di anelli prodotti. Gli studenti potrebbero usare espressioni del tipo "Perché noto che il numero di anelli prodotti diminuisce", altri potrebbero usare frasi più complete come "Perché ho notato che il numero di anelli prodotti in un'ora diminuisce col trascorrere delle ore, oppure diminuisce man mano che aumentano le ore trascorse". Una osservazione di questo tipo, seppur "ragionevole", non autorizza ad affermare "con certezza" quale sarà il numero di anelli. Si faccia notare agli studenti che nella seconda domanda viene appositamente usata l'espressione "con certezza". Si possono quindi fare delle considerazioni su cosa sia "ragionevole", "probabile" e cosa sia invece "certo".

Fase 2

Il racconto continua ed in questo caso, a seguito dell'incantesimo, le due grandezze sono direttamente proporzionali. Continuando a lavorare in gruppi, gli studenti compilano la nuova tabella (punto 2.1) e rispondono alle domande che fungono da stimolo per la decodifica dei dati presenti in tabella (dal punto 2.2 al punto 2.8).

Questa volta gli studenti sono invitati ad isolare alcune parole chiave che nel brano evidenziano come la produzione degli anelli sia questa volta prevedibile (punto 2.2). Le espressioni che maggiormente evocano questa caratteristica sono "con certezza", "con regolarità" e "sempre".

Gli studenti sono anche invitati a identificare le regolarità presenti nella tabella, relative soprattutto alla seconda e alla quinta colonna che riportano sempre lo stesso valore pari a 20 (punto 2.3). Il docente porrà l'attenzione sul fatto che il numero 20 rappresenta il numero di anelli forgiati in un'ora e viene ottenuto anche calcolando il rapporto tra numero totale di anelli prodotti (n) e numero totale di ore trascorse (h). Si dovrà mettere in evidenza che, proprio per via di queste "regolarità", è possibile stabilire quanti anelli verranno prodotti durante la quinta ora e quanti anelli saranno prodotti in totale dopo 5 ore (rispettivamente 20 e 100).

Nel punto 2.4 si chiede agli studenti di spiegare la strategia mediante la quale sono in grado di prevedere il numero di anelli prodotti. Alcuni studenti potrebbero notare che, per determinare il numero di anelli prodotti dopo 5 ore, occorre sommare 20 ad 80 (il numero di anelli prodotti in un'ora più quelli prodotti nelle precedenti 4 ore). Il docente metterà in evidenza che questo ragionamento "additivo" è corretto, ma risulta sconveniente quando occorre calcolare il numero di anelli prodotti in 12 ore (punto 2.5). In tal caso la chiave "moltiplicativa" di soluzione è più efficace. In pratica conviene moltiplicare il numero di ore (12) per il numero di anelli prodotti in ciascun'ora (20), ossia 12x20=240.

La compilazione della scheda studente da parte dei gruppi si conclude con delle osservazioni che mettono in evidenza le caratteristiche della diretta proporzionalità fra due grandezze. In particolare il completamento del punto 2.6 identifica la caratteristica che al raddoppiare e al triplicare di una grandezza, anche l'altra raddoppia o triplica. Il completamento del punto 2.7 mette in rilievo che se una grandezza dimezza o diviene la terza parte, anche l'altra dimezza o diviene la terza parte. L'ultima domanda (punto 2.8) pone l'accento sul fatto che il rapporto tra due grandezze direttamente proporzionali è costante.

Nella discussione collettiva finale si chiariranno definitivamente quali sono le caratteristiche della diretta proporzionalità. Può essere utile mettere in rilievo che "diretta proporzionalità" non vuol dire "crescita", né vuol dire "crescita regolare", bensì vuol dire "crescita mantenendo il rapporto costante".

Fase 3

La parte finale del racconto introduce due grandezze inversamente proporzionali. Completata la tabella nella scheda (punto 3.1), gli studenti sono invitati a cogliere nel racconto quelle coppie di

verbi con significato opposto, che prefigurano le caratteristiche dell'inversa proporzionalità (punto 3.2). Alcuni esempi sono rappresentati dalle coppie di verbi "ridurre" e "aumentare" o, più precisamente, "raddoppiando" e "dimezzare".
Il punto 3.3 richiede l'individuazione di regolarità nella tabella. Quella più evidente è il valore della quarta colonna, ricavato dal prodotto del numero di fabbri per il numero di ore di produzione, che è sempre pari a 12.
Nella discussione finale il docente metterà in evidenza che è possibile calcolare con certezza il numero di ore impiegate dai 6 fabbri per produrre 240 anelli (punto 3.4). A tale proposito, qualche alunno potrebbe notare che la coppia di numeri 3 e 4 presenti nella terza riga (la quarta contando la riga di intestazione) si ripete invertita nella quarta riga (numeri 4 e 3). Questa osservazione può indurre l'alunno a rispondere alla domanda facendo uso della proprietà commutativa della moltiplicazione. Difatti il valore del numero di fabbri e del numero di ore possono essere scambiati ottenendo sempre lo stesso prodotto pari a 12. In pratica se 2 fabbri impiegano 6 ore, allora 6 fabbri impiegheranno 2 ore, in quanto $2 \times 6 = 6 \times 2 = 12$. Altri alunni potrebbero ricavare una regola più complessa, ma più generale. Sapendo che i fabbri sono 6 e che il prodotto del numero dei fabbri per il numero di ore deve valere 12, allora il numero di ore si ottiene calcolando la divisione 12:6=2; pertanto 6 fabbri impiegheranno 2 ore. Questo metodo risolutivo diventa indispensabile per determinare quante ore impiegano 5 fabbri. Occorre dividere 12:5=2,4, ottenendo 2,4 ore.
I punti 3.5, 3.6 e 3.7 aiutano a decodificare le proprietà delle grandezze inversamente proporzionali. Queste caratteristiche verranno ribadite nella discussione collettiva finale.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1 – Fase 1 - A scuola di magia

Per far apprendere le arti magiche ai suoi apprendisti, la fata Morgana chiede al forzuto fabbro Markus di forgiare nel suo laboratorio degli anelli magici. Il forzuto Markus lavora con buona lena e dopo la prima ora produce 10 anelli, nell'ora successiva è un po' stanco e produce solo 8 anelli. Sicché dopo due ore Markus avrà prodotto 18 anelli magici. Andando avanti nel suo lavoro Markus si stanca sempre di più e durante la terza ora forgia 5 anelli, mentre nella quarta ne forgia 4.

Punto 1.1) In base alle informazioni presenti nel brano, completa la seguente tabella fino al rigo relativo alla **quarta ora**.

Ora	Numero di anelli prodotti nella singola ora	Numero totale di ore trascorse dall'inizio della produzione (h)	Numero totale di anelli prodotti dall'inizio della produzione (n)	Calcola il rapporto n:h
Prima	10	1	10	10:1=10
Seconda	8	2	18	
Terza				
Quarta				
Quinta				

Punto 1.2) Osserva i numeri che hai riportato in tabella. Cosa succede al numero di anelli prodotti in un'ora, passando da un'ora alla successiva? Perché? Cosa succede al numero totale di anelli prodotti da Markus all'aumentare del numero di ore trascorse?

Punto 1.3) Prova a completare, se possibile, la tabella riportando dei numeri relativi alla quinta ora. Puoi stabilire con certezza quanti anelli produrrà Markus durante la quinta ora e quale sarà il numero totale di anelli prodotti dopo che sono trascorse 5 ore? Spiega perché secondo te è possibile oppure non è possibile riportare in tabella dei numeri per la quinta ora.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1– Fase 2 - A scuola di magia

Morgana è una fata, ma non è una indovina; pertanto non può dire con certezza quanti anelli Markus avrà prodotto dopo cinque oppure dopo sei ore. Non potendo valutare il numero di anelli prodotti, Morgana decide di fare un incantesimo e conferisce a Markus una forza infinita, affinché egli possa essere "instancabile" e lavorare sempre al massimo delle sue capacità. A questo punto Markus inizia a produrre anelli con regolarità e con un grande ritmo. Dopo aver forgiato 20 anelli nella prima ora, ne produce altri 20 nella seconda, ancora 20 nella terza, nuovamente 20 nella quarta e così via.

Punto 2.1) In base alle informazioni presenti nel brano, completa la seguente tabella fino al rigo relativo alla **quarta ora**.

Ora	Numero di anelli prodotti nella singola ora	Numero totale di ore trascorse dall'inizio della produzione (h)	Numero totale di anelli prodotti dall'inizio della produzione (n)	Calcola il rapporto n:h
Prima	20	1	20	20:1=20
Seconda	20	2	40	
Terza				
Quarta				
Quinta				

Punto 2.2) Nel secondo brano vi sono alcune "parole chiave" che distinguono la situazione da quella del brano dell'attività precedente. Quali sono?

Punto 2.3) Quali sono le regolarità che noti nella tabella? Cosa rappresenta il valore 20 che ricorre spesso nella tabella?

Punto 2.4) Perché questa volta puoi stabilire con certezza quanti anelli produrrà Markus durante la quinta ora? Come puoi calcolare il numero totale di anelli prodotti dopo 5 ore?

Punto 2.5) Come puoi calcolare "rapidamente" il numero di anelli prodotti dopo 12 ore?

Punto 2.6) Prova a scorrere i dati nelle colonne 3 e 4 della tabella dall'alto verso il basso e completa le seguenti frasi.

Se il numero totale di ore h **raddoppia** passando da 1 a 2, allora il numero totale n di anelli prodotti ___________ passando da ___ a ___.

Se il numero totale di ore h **triplica** passando da 1 a 3, allora il numero totale n di anelli prodotti ___________ passando da ___ a ___.

Se il numero totale di ore h **raddoppia** passando da 2 a 4, allora il numero totale n di anelli prodotti ___________ passando da ___ a ___.

Punto 2.7) Prova a scorrere i dati nelle colonne 3 e 4 della tabella dal basso verso l'alto e completa le seguenti frasi.

Se il numero totale di ore h **si dimezza** passando da 2 a 1, allora il numero totale n di anelli prodotti _____________ passando da ___ a ___.

Se il numero totale di ore h **diventa un terzo** passando da 3 a 1, allora il numero totale n di anelli prodotti ______________________ passando da ___ a ___.

Se il numero totale di ore h **si dimezza** passando da 4 a 2, allora il numero totale n di anelli prodotti _____________ passando da ___ a ___.

Punto 2.8) Infine prova a scorrere i dati della colonna 5 della tabella. Si può affermare che il rapporto tra il numero totale n di anelli prodotti e il numero totale di ore h:

A. È costante (non varia);
B. Aumenta all'aumentare del numero di ore;
C. Diminuisce all'aumentare del numero di ore.

Due grandezze come n (il numero totale di anelli) e h (il numero totale di ore) che hanno le caratteristiche che hai appena identificato sono dette

GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1– Fase 3 - A scuola di magia

Il forzuto fabbro Markus è in grado di produrre con regolarità anelli magici e ne produce 20 per ora. La fata Morgana vuole però ridurre il tempo di produzione degli anelli e per farlo decide di aumentare il numero di fabbri, creando dei gemelli di Markus con un incantesimo. Markus produce 240 anelli in 12 ore. Pertanto raddoppiando il numero di fabbri forzuti che lavorano contemporaneamente, si può dimezzare il tempo di produzione dei 240 anelli passando da 12 a 6 ore (la metà del tempo). Con un incantesimo ancora più potente Morgana potrebbe creare 3 fabbri forzuti che potrebbero forgiare i 240 anelli in sole 4 ore. Infine 4 fabbri potrebbero concludere il lavoro in 3 ore.

Punto 3.1) In base alle informazioni presenti nel brano, completa la seguente tabella.

Anelli da produrre (minuti)	Numero di fabbri forzuti (f)	Numero totale di ore per la produzione (h)	Calcola il prodotto $f \times h$	Calcola il rapporto f:h
240	1	12		
240	2			
240				

Punto 3.2) Quante volte riesci ad individuare nella stessa frase del brano dei verbi di significato opposto? Quali coppie di verbi hai individuato?

____

____

____

Punto 3.3) Quali sono le regolarità che noti nella tabella?

____

____

____

Punto 3.4) Puoi stabilire con certezza in quante ore 6 fabbri che lavorano contemporaneamente produrrebbero i 240 anelli? Se è possibile stabilirlo con certezza, allora spiega come calcoleresti questo numero di ore. E se i fabbri fossero 5, quanto tempo impiegherebbero?

____

____

____

____

____

____

____

Punto 3.5) Prova a scorrere i dati nelle colonne 2 e 3 della tabella dall'alto verso il basso e completa le seguenti frasi.

Se il numero di fabbri f **raddoppia** passando da 1 a 2, allora il numero totale h di ore necessarie alla produzione __________ passando da ___ a ___.

Se il numero di fabbri f **triplica** passando da 1 a 3, allora il numero totale h di ore necessarie alla produzione _________________ passando da ___ a ___.

Se il numero di fabbri f **raddoppia** passando da 2 a 4, allora il numero totale h di ore necessarie alla produzione _________ passando da ___ a ___.

Punto 3.6) Ora prova a scorrere i dati nelle colonne 2 e 3 della tabella dal basso verso l'alto e completa le seguenti frasi.

Se il numero di fabbri f **si dimezza** passando da 2 a 1, allora il numero totale h di ore necessarie alla produzione _________ passando da ___ a ___.

Se il numero di fabbri f **diventa un terzo** passando da 3 a 1, allora il numero totale h di ore necessarie alla produzione _________ passando da ___ a ___.

Se il numero di fabbri f **si dimezza** passando da 4 a 2, allora il numero totale h di ore necessarie alla produzione _________ passando da ___ a ___.

Punto 3.7) Infine prova a scorrere la colonna 4 della tabella. Si può affermare che il prodotto tra il numero di fabbri f di e il numero totale di ore h necessarie alla produzione:

A. È costante (non varia);
B. Aumenta all'aumentare del numero di fabbri;
C. Diminuisce all'aumentare del numero di fabbri.

Due grandezze come f (il numero di fabbri) e h (il numero totale di ore) che hanno le caratteristiche che hai appena identificato sono dette

GRANDEZZE INVERSAMENTE PROPORZIONALI

Attività 2 – Biglie e Bottiglie

Indicazioni per il docente

Tipologia: attività articolata in due fasi da condurre in laboratorio con semplici strumenti (contenitori, becher graduati, bilancia elettronica) e materiali molto comuni (biglie e bottiglie). Ciascuna fase corrisponde ad un esperimento, svolto da alunni suddivisi in gruppi da tre o quattro che compilano una scheda studente. Dopo la raccolta dati si passa alla rappresentazione degli stessi mediante il computer. Alla fine di ciascuna fase ha luogo una discussione collettiva. Se non vi è sufficiente materiale per far svolgere a ciascun gruppo l'esperimento, allora il docente può organizzare un unico esperimento coinvolgendo a turno i vari studenti. In tal caso gli studenti possono compilare la scheda in coppie.

Tempo: 3 ore

Obiettivo didattico: Applicare il metodo sperimentale per verificare le caratteristiche di due grandezze direttamente o inversamente proporzionali. Passare dalla rappresentazione numerica (tabellare) a quella grafica e a quella simbolica (funzionale) per grandezze direttamente o inversamente proporzionali. Far ripercorrere agli alunni il metodo sperimentale galileiano induttivo/deduttivo. In particolare, nella prima parte di ciascuna esperienza, di carattere induttivo, si individua il legame tra le grandezze stabilendo una relazione di proporzionalità; nella seconda parte, di carattere deduttivo, si opera una previsione mediante la relazione di proporzionalità ipotizzata e se ne verifica la predittività misurando nuovamente le grandezze coinvolte.

Fase 1 – Esperienza "Biglie"

Materiali:

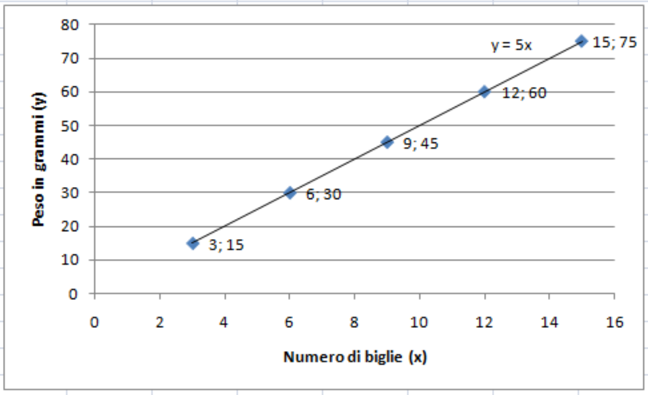
- un sacchetto di biglie di vetro identiche (tutte con il medesimo peso, generalmente di circa 5 grammi)
- una bilancia elettronica
- un contenitore che possa raccogliere le biglie di vetro sulla bilancia

Gli studenti poggiano il contenitore sulla bilancia elettronica ed azzerano il display della bilancia; raccolgono dal sacchetto 3 palline e le inseriscono nel contenitore. Di seguito leggono il peso indicato sul display e riportano numero di palline e peso in tabella. Ripetono l'operazione con un numero doppio e triplo di palline annotando sulla tabella (punto 1.1).
A questo punto gli studenti osservano se al raddoppiare di una quantità (ad esempio il numero di biglie x), l'altra quantità, ossia il loro peso y, raddoppia o dimezza. Di seguito gli studenti calcolano il prodotto ed il rapporto delle coppie di valori riportate in tabella e formulano le loro ipotesi circa la proporzionalità delle due grandezze (dal punto 1.2 al punto 1.4).
Si passa alla fase deduttiva. Gli studenti sono invitati a dedurre quanto pesi una singola biglia e ad ipotizzare il peso di un numero di biglie non ancora considerato (punto 1.5). Dopo aver formulato l'ipotesi, si attua una verifica mediante la procedura sperimentale di pesatura (punto 1.6).

Se l'esperienza non può essere svolta in laboratorio, si può utilizzare il file di presentazione che simula l'esperienza (file attività_2_fase_1.pptx oppure file attività_2_fase_1.ppt).

L'analisi dei dati, raccolti e riportati nella tabella della scheda studente, viene fatta con l'ausilio di un foglio di calcolo. In tal modo gli studenti hanno una visione contemporanea, chiara e completa delle tre possibili rappresentazioni dei dati (numerica, grafica e simbolica). Nel foglio di calcolo risulta pratico ed immediato inserire i dati in formato tabellare. Selezionando la tabella di dati si può creare un grafico a dispersione che li rappresenti (comando Inserisci→Grafico). Nel foglio di calcolo si può ricalcolare il rapporto (indicato con m che ha valore costante) per ciascuna delle coppie di dati. Infine si può ricalcolare il peso y, come prodotto del valore del rapporto *m* e del numero di biglie *x*. Quest'ultima operazione, banale se considerata come operazione inversa del calcolo precedente, è utile in realtà per introdurre la rappresentazione simbolica (funzionale) delle due grandezze come y=m·x. Selezionando la serie di dati nel grafico ed utilizzando il comando Linea di tendenza (opzione lineare), si può riportare sul grafico la rappresentazione simbolica. In figura è mostrata una immagine del foglio di calcolo nel quale sono visibili le tre rappresentazioni (il foglio "biglie" del file attività_2.xls, disponibile come guida per le esercitazioni di laboratorio).

	A	B	C	D
1	Grandezze direttamente proporzionali			
2	Numero di biglie (x)	Peso in grammi (y)	Rapporto m=y:x	y = m·x
3	3	15	5	15
4	6	30	5	30
5	9	45	5	45
6	12	60	5	60
7	15	75	5	75
8				
9				
10	N.B.: Le sole celle modificabili sono quelle con lo sfondo giallo.			



Fase 2 – Esperienza "Bottiglie"

Materiali:

- almeno 4 delle seguenti tipologie di bottiglie
  - una bottiglietta da bitter (analcolico) da 125 ml
  - una bottiglia di una birra da 330 ml
  - una bottiglia di PET (plastica riciclabile) da 500 ml=0,5 l
  - una bottiglia per vino da 750 ml
  - una bottiglia di PET da 1500 ml=1,5 l
  - una bottiglia di PET da 2000 ml=2 l
- un becher graduato
- un contenitore abbastanza capiente sul quale disegnare una tacca in corrispondenza di una capienza pari a 2 litri
- Presenza in laboratorio di un rubinetto di acqua corrente

Gli studenti considerano a turno una delle bottiglie in loro dotazione, controllandone la capienza. Riempiono la bottiglia fino alla parte alta del collo sotto il rubinetto e versano l'acqua in essa raccolta nel contenitore vuoto. Tale operazione viene ripetuta, conteggiando il numero di volte che la bottiglia viene svuotata, fino a quando il contenitore non si riempie di acqua fino alla tacca che segna due litri. La capienza ed il conteggio vengono riportati in tabella.

Svuotato il contenitore si prova a riempirlo con una bottiglia di capienza diversa, riportando nuovamente in tabella il numero di volte e la capienza stessa (punto 2.1).

Quando la bottiglia non ha una capienza in ml pari a un divisore della capienza di 2000 ml, allora il docente farà versare, per l'ultima volta, la bottiglia fino al segno della tacca del contenitore. Di seguito, osservando l'acqua rimasta nella bottiglia, consiglierà agli alunni di approssimare il numero di volte usando le cifre decimali. Ad esempio per la bottiglia di vino da 0,750 l, il numero di volte sarà pari a circa 2,5 (due volte e mezzo) o, più precisamente, 2,67.

Gli studenti sono invitati ad osservare se al raddoppiare di una quantità (ad esempio la capienza y), l'altra quantità, ossia il numero di volte x, raddoppia o dimezza. Di seguito, calcolano il prodotto ed il rapporto delle coppie di valori riportate in tabella e formulano le loro ipotesi circa la proporzionalità delle due grandezze (punti 2.2, 2.3 e 2.4).

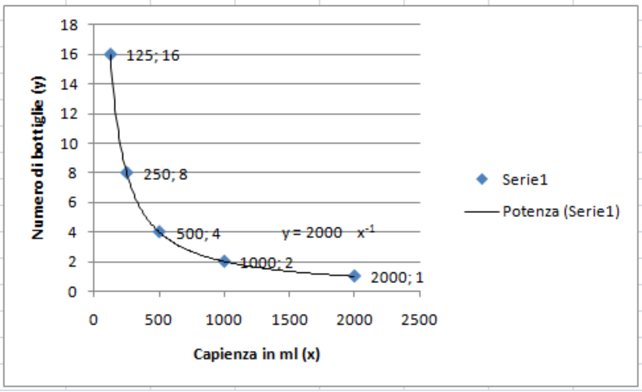
Scoperta l'inversa proporzionalità fra le grandezze, si passa alla fase deduttiva. Si chiede pertanto agli studenti di stimare quante volte dovranno versare nel contenitore il becher riempito per un certo quantitativo di liquido e verificare sperimentalmente la previsione (punti 2.5 e 2.6).

In entrambe le esperienze è bene sottolineare che le misure possono essere soggette ad errori che creano lievi discrepanze tra la previsione effettuata e la grandezza misurata. L'insegnate darà rilievo al fatto che, leggendo i dati al netto delle incertezze sperimentali, è possibile individuare il vero legame che sussiste tra le grandezze considerate.

Se l'esperienza non può essere svolta in laboratorio, si può utilizzare il file di presentazione che simula l'esperienza (file attività_2_fase_2.pptx oppure file attività_2_fase_2.ppt).

L'analisi dei dati e la rappresentazione degli stessi nelle varie modalità viene fatta con l'ausilio di un foglio di calcolo (punto 2.7). Dopo aver inserito i dati nel foglio di calcolo si seleziona la tabella e si crea un grafico a dispersione mediante il comando Inserisci→ Grafico. Nel foglio di calcolo si può ricalcolare il prodotto (indicato con *m* che ha valore costante) per ciascuna delle coppie di dati. Infine si può ricalcolare il numero di bottiglie y, come rapporto del valore del prodotto m e della capienza *x*. In tal modo si deduce la rappresentazione simbolica (funzionale) delle due grandezze come y=m/x. Selezionando la serie di dati nel grafico ed utilizzando il comando Linea di tendenza (opzione Potenza), si può riportare sul grafico la rappresentazione funzionale. In figura è mostrata una immagine del foglio di calcolo nel quale sono visibili le tre rappresentazioni (il foglio "bottiglie" del file attività_2.xls, disponibile come guida per le esercitazioni di laboratorio).

	A	B	C	D
1	Grandezze inversamente proporzionali			
2	Capienza in ml (x)	Numero di bottiglie (y)	Prodotto m=y·x	y = m/x
3	125	16	2000	16
4	250	8	2000	8
5	500	4	2000	4
6	1000	2	2000	2
7	2000	1	2000	1
8				
9				
10	N.B.: Le sole celle modificabili sono quelle con lo sfondo giallo.			
11				
12				
13				
14				
15				
16				



Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 2 – Fase 1 – Biglie e bottiglie.

Punto 1.1) Appoggia il contenitore sulla bilancia elettronica e azzera il display. Seleziona un numero x=3 di biglie, annota il numero nella prima colonna della tabella sottostante e poggia le biglie nel contenitore. Osserva la misura del peso y e riportala nella seconda colonna. Svuota il contenitore con le palline e ripeti questa operazione con un numero di palline crescente, ad esempio x=6, x=9 ed x=12.

Numero di palline x	Peso (massa) misurato y (grammi)	Calcola il prodotto di y e x	Calcola il rapporto m di y e x

Punto 1.2) Se il numero di biglie raddoppia, cosa succede al peso delle biglie? Se il numero delle biglie triplica, cosa succede al loro peso?

____
____
____

Punto 1.3) Per ciascun numero x di biglie e per il peso misurato y, calcola il prodotto $y \times x$ ed il rapporto y:x. Riporta questi valori nella terza e nella quarta colonna. Sei in grado di stabilire se il prodotto o il rapporto restano costanti? Cosa rappresenta il rapporto y:x?

____
____
____

Punto 1.4) In base ai dati raccolti e riportati in tabella puoi stabilire se le grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali? Perché?

____
____
____

Punto 1.5) Ora proviamo ad indovinare. Calcola quanto pesa una biglia senza pesarla? Calcola quale sarebbe il peso indicato dalla bilancia se nel contenitore poggiassimo 8 biglie (un numero finora non considerato).

____
____
____
____

Punto 1.6) Ora pesa una singola biglia e di seguito pesa 8 biglie. Cosa noti? Le tue previsioni erano corrette?

____
____

Punto 1.7) In un foglio di calcolo elettronico digita la tabella che hai completato. Verifica che il peso y si può ottenere moltiplicando il rapporto m per il numero di biglie x. Crea un grafico di *tipo dispersione* con le prime due colonne di dati ed aggiungi una linea di tendenza di *tipo lineare* al grafico.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 2– Fase 2 – Biglie e bottiglie.

Punto 2.1) Scegli la bottiglia più piccola e scrivi di che tipo di bottiglia si tratta nella prima colonna. Nella seconda colonna riporta la capienza *x* della bottiglia. Riempi la bottiglia quasi fino all'orlo con l'acqua del rubinetto. Versa l'acqua raccolta nel contenitore vuoto. Ripeti la procedura, conteggiando quante volte riempi la bottiglia, fino a quando il contenitore non si riempie di acqua fino alla tacca che segna due litri. Il conteggio va riportato nella terza colonna della tabella.

Tipo di bottiglia	Capienza x (ml)	Numero di bottiglie versate y	Calcola il prodotto m di y e x	Calcola il rapporto di y e x

Punto 2.2) Se la capienza raddoppia, triplica o quadruplica, cosa succede al numero di volte in cui la bottiglia viene versata per riempire il contenitore?

Punto 2.3) Per ciascuna capienza *x* e per ciascun numero di volte y, calcola il prodotto $y \times x$ ed il rapporto $y{:}x$. Riporta questi valori nella quarta e nella quinta colonna. Sei in grado di stabilire se il prodotto o il rapporto restano costanti? Cosa rappresenta il prodotto $y \times x$?

Punto 2.4) In base ai dati raccolti e riportati in tabella puoi stabilire se le grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali? Perché?

Punto 2.5) Ora proviamo ad indovinare. Quante volte occorrerebbe versare una bottiglia da 400 ml per riempire il contenitore?

Punto 2.6) Dopo aver formulato la tua ipotesi, prova a verificarla usando il becher graduato. Riempi il becher fino ad un volume pari a 400ml e versalo nel contenitore. Ripeti l'operazione fino a quando l'acqua nel contenitore raggiunge il livello indicato pari a 2 litri. Cosa noti? Le tue previsioni erano corrette?

Punto 2.7) In un foglio di calcolo elettronico digita la tabella che hai completato. Verifica che il numero di bottiglie y si può ottenere dividendo il prodotto m per la capienza x. Crea un grafico di *tipo dispersione* con le prime due colonne di dati ed aggiungi una linea di tendenza di *tipo potenza* al grafico.

Attività 3 – Non è solo questione di numeri

Indicazioni per il docente

Tipologia: attività articolata in due fasi da condurre in laboratorio con semplici strumenti (contenitori, becher graduati e bicchieri) e prodotti molto comuni (sciroppi e succhi di frutta). Ciascuna fase corrisponde ad un esperimento, svolto da alunni suddivisi in gruppi da tre o quattro che compilano una scheda studente. Alla fine di ciascuna fase ha luogo una discussione collettiva. Se non vi è sufficiente materiale per far svolgere a ciascun gruppo l'esperimento, allora il docente può organizzare un unico esperimento coinvolgendo a turno i vari studenti. In tal caso gli studenti possono compilare la scheda in coppie.

Tempo: 2 ore

Obiettivo didattico: Attraverso una esperienza laboratoriale, si vuole mettere in evidenza come la diretta proporzionalità tra due grandezze possa essere riscontrata anche in modo "sensoriale", senza necessariamente ricorrere ai numeri. In particolare, il fatto che due grandezze siano direttamente proporzionali si può evidenziare non solo verificando che il loro rapporto sia costante, ma anche mostrando che al raddoppiare di entrambe o al triplicare di entrambe, l'effetto sensoriale che producono resta invariato. Ad esempio possono lasciare invariata la sensazione visiva (il colore di una miscela) o la sensazione gustativa (il sapore di una bevanda).

Fase 1 – Esperienza "Il Barman"

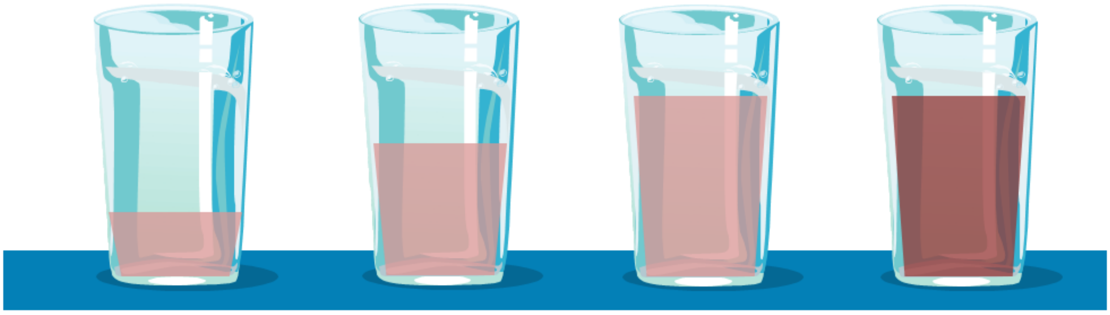
Materiali:

- Uno sciroppo per bevande dal colore molto intenso (sciroppo di amarena, sciroppo di menta).
- Un becher graduato
- Bicchieri <u>identici</u> (è un aspetto importante) di una capienza di circa 250 ml.
- Un cucchiaino
- Presenza in laboratorio di un rubinetto di acqua corrente.

Si riempie il becher con un certo quantitativo di acqua del rubinetto e lo si versa nel primo bicchiere. Di seguito si versa nel becher una certa quantità di sciroppo (circa un quinto o un quarto del quantitativo di acqua) e lo si travasa nel medesimo bicchiere in cui è presente l'acqua. Si annota in tabella il quantitativo in ml di sciroppo e di acqua e si calcola il rapporto (punto 1.1). Si mescola bene la bevanda nel contenitore fino ad ottenere una tinta omogenea che costituirà il colore di riferimento.

Si sciacqua il becher e lo si riempie nuovamente di un quantitativo di acqua doppio rispetto al caso precedente e lo si versa in un secondo bicchiere. Di seguito anche il quantitativo di sciroppo viene raddoppiato e versato nel nuovo bicchiere in cui vi è sola acqua. Si annotano i nuovi valori in ml dei due liquidi nella tabella, si calcola il rapporto e si mescola la bevanda ottenuta. A questo punto si confronta il colore di questa bevanda con quello della precedente e si esprime un parere di similarità o diversità (colonna 5 della tabella del punto 1.1). Si ripetono le operazioni triplicando il volume di acqua e di sciroppo rispetto ai quantitativi versati nel primo bicchiere.

Infine si versano in un ultimo bicchiere un quantitativo di acqua e di sciroppo che non sono in diretta proporzionalità con i casi precedenti (ad esempio stessa acqua e più sciroppo) in modo da ottenere un colore più intenso, più carico. Le miscele ottenute dovrebbero presentarsi come nella seguente figura.



A questo punto gli alunni sono invitati a fare considerazioni sul colore ottenuto nei primi tre casi e nell'ultimo (punto 1.2). Si stabilisce la seguente regola (punti 1.3 e 1.4): fino a quando le grandezze variano in modo direttamente proporzionale, il colore della bevanda ottenuta è lo stesso; se non si mantiene la diretta proporzionalità, allora il colore inizia a variare di intensità (diventa più carico oppure più sbiadito).
Gli studenti possono eventualmente completare la scheda anche con lo scatto di una foto dei bicchieri, che mostri con evidenza le tonalità di colori ottenuti.
L'attività si conclude con una discussione collettiva dalla quale il docente deve far emergere quanto riportato correttamente nei punti 1.3 e 1.4 della scheda.
Se non si dispone dei materiali e dei luoghi adatti per svolgere l'esperienza, si può usare la simulazione contenuta nel file attività_3_fase_1.ggb (oppure nel file attività_3_fase_1.html). Mediante tale simulazione si può generare una immagine da incollare sulla scheda per lo studente.

Fase 2 – Esperienza "Il Sommelier"
Materiali:

- Uno succo di frutta (ad esempio, succo di arancia).
- Un becher graduato
- Un cucchiaino
- Presenza in laboratorio di un rubinetto di acqua corrente.
- Bicchieri possibilmente diversi e non trasparenti di una capienza di circa 250 ml.

È una esperienza simile alla precedente. Questa volta nei bicchieri si mescolano acqua e succo d'arancia in quantitativi sempre direttamente proporzionali. I quantitativi vengono riportati in una tabella (punto 2.1). Si prepara poi un bicchiere nel quale succo ed acqua non sono mescolati nelle medesime proporzioni adottate per gli altri bicchieri. Di seguito si eleggono dei "sommelier", ossia dei degustatori di succo di arancia. I degustatori sono invitati ad assaggiare le varie bevande e a fornire una opinione sul loro livello di dolcezza, confrontandolo con quello della prima bevanda che funge da riferimento (colonna 5 della tabella del punto 2.1).
Seguono al solito le osservazioni sulla diretta proporzionalità (punti 2.2, 2.3 e 2.4). Anche in questo caso l'attività si conclude con una discussione collettiva.

Una variante. Per rendere l'attività più avvincente è possibile organizzare una gara nella quale i sommelier si cimentano nell'individuare il bicchiere riempito con la miscela che non è nelle stesse proporzioni degli altri. In tal caso è opportuno che i bicchieri siano diversi e non trasparenti, altrimenti il colore della miscela potrebbe suggerire ai sommelier quella da individuare.

Per entrambe le esperienze, se il docente lo ritiene opportuno, può riferirsi al rapporto tra quantitativo di sciroppo (o di succo) e quantitativo di acqua come alla "concentrazione" di sciroppo (o di succo). Le miscele con proprietà identiche si ottengono mantenendo costante il rapporto tra i quantitativi, ossia facendoli variare in maniera direttamente proporzionale, in altre parole, mantenendo costante la "concentrazione".

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 3 – Fase 1 – Non è solo questione di numeri.

Punto 1.1) Nella prima colonna riporta in ml in quantitativo di sciroppo versato nel bicchiere e nella seconda colonna il quantitativo di acqua. Nella terza colonna calcola il rapporto tra i due quantitativi. La bevanda ottenuta darà il colore di riferimento. Di seguito raddoppia e poi triplica i quantitativi di sciroppo e acqua, mescolandoli in altri bicchieri. Di volta in volta osserva se il colore ottenuto per le nuove miscele è approssimativamente identico a quello di riferimento.

Miscela	Sciroppo (ml)	Acqua (ml)	Rapporto sciroppo/acqua	Intensità del colore
1				Colore di riferimento
2				□ maggiore □ minore □ uguale
3				□ maggiore □ minore □ uguale
4				□ maggiore □ minore □ uguale

Nella quarta miscela lascia invariato il quantitativo di acqua usato per la terza miscela e raddoppia lo sciroppo. Di seguito calcola il rapporto e valuta l'intensità del colore.

Punto 1.2) Quale differenza noti tra i colori delle miscele 1, 2, 3 e 4?

____
____
____

Punto 1.3) Come colleghi il comportamento del colore della miscela con i valori numerici presenti in tabella?

____
____
____

Punto 1.4) Indica in che modo il colore della miscela e la diretta proporzionalità di acqua e sciroppo sono in relazione?

____
____
____

Se lo ritieni opportuno, puoi completare la scheda incollando nello spazio sottostante una foto delle miscele ottenute, indicando per quali di esse vige un rapporto di diretta proporzionalità.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 3 – Fase 2 – Non è solo questione di numeri.

Punto 2.1) Nella prima colonna riporta in ml in quantitativo di succo di frutta versato nel bicchiere e nella seconda colonna il quantitativo di acqua. Nella terza colonna calcola il rapporto tra i due quantitativi. La bevanda ottenuta darà il sapore di riferimento al sommelier. Di seguito raddoppia e poi triplica i quantitativi di succo di frutta e acqua, mescolandoli in altri bicchieri. Di volta in volta il sommelier giudica se il sapore delle miscele è approssimativamente identico a quella di riferimento.

Miscela	Succo (ml)	Acqua (ml)	Rapporto succo/acqua	Intensità del sapore
1				Sapore di riferimento
2				□ maggiore □ minore □ uguale
3				□ maggiore □ minore □ uguale
4				□ maggiore □ minore □ uguale

Nella quarta miscela lascia invariato il quantitativo di acqua usato per la terza miscela e raddoppia il succo di frutta. Di seguito calcola il rapporto, mentre il sommelier valuta il sapore.

Punto 2.2) Quale differenza il sommelier ha notato tra i sapori delle miscele 1, 2, 3 e 4?

____

____

____

Punto 2.3) Come colleghi il comportamento del sapore della miscela con i valori numerici presenti in tabella?

____

____

____

Punto 2.4) Indica in che modo il sapore della miscela e la diretta proporzionalità di acqua e succo sono in relazione?

____

____

____

Attività 4 – No problem!

Indicazioni per il docente

Tipologia: attività di tipo "learning by doing" suddivisa in tre fasi. In ciascuna fase gli alunni, organizzati in coppie, effettuano un percorso guidato che progressivamente lascia loro maggiore autonomia di operare. Ogni fase si conclude con una discussione collettiva, moderata dal docente.

Tempo: 3 ore

Obiettivo didattico: Risolvere semplici problemi di diretta ed inversa proporzionalità (problemi del tre semplice), mediante una strategia che sfrutti le proprietà di invarianza del rapporto o del prodotto delle grandezze, evitando l'uso meccanico delle proporzioni ed il formalismo ad esse connesso. Risolvere problemi che coinvolgono più di due grandezze (i problemi del tre composto), scomponendoli in due o più problemi semplici di diretta o inversa proporzionalità.

Fase 1

Vengono proposti tre problemi che coinvolgono grandezze direttamente proporzionali.

L'analisi del primo problema avviene mediante il completamento di una tabella (punti 1.1 e 1.2). Di seguito, l'utilizzo di una mappa concettuale (percorso) guida, passo dopo passo, lo studente nella scoperta della relazione che lega le due grandezze (punto 1.3) e nella determinazione del valore incognito (punto 1.4).

Nel secondo problema il percorso viene snellito ed i passaggi risolutivi sono proposti in modo più esile (punti 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8). Nel terzo ed ultimo problema la strategia viene solo rammentata: sarà lo studente a dover ripercorrere il metodo risolutivo, in piena autonomia (punto 1.9).

Fase 2

Il percorso è simile a quello della fase 1, ma i problemi proposti coinvolgono grandezze inversamente proporzionali. Per il primo problema i passaggi risolutivi sono proposti in modo schematico, mentre nel secondo problema la strategia risolutiva viene rammentata solo per grandi linee.

Fase 3

Si affrontano due problemi del 3 composto che coinvolgono tre grandezze ciascuno. La strategia risolutiva proposta permette di ridurre i quesiti a problemi del tre semplice, con il vantaggio di poter adottare in due passi la tecnica appresa nelle fasi 1 e 2. Anche in questo caso l'abilità di individuare la diretta o l'inversa proporzionalità tra grandezze risulta un aspetto cruciale.

È opportuno concludere ciascuna delle fasi con una discussione nella quale gli alunni lascino emergere eventuali difficoltà. Quelle più ricorrenti dovrebbero essere le seguenti:

- Difficoltà nell'individuare la relazione di diretta o inversa proporzionalità tra grandezze;
- Difficoltà nel rammentare se il prodotto o il rapporto tra le grandezze sono costanti;
- Difficoltà nell'applicare correttamente la sequenza di calcolo; in particolare, nel calcolare il rapporto costante nel caso delle grandezze direttamente proporzionali, occorre dividere il solo valore noto della grandezza da dover determinare per il valore corrispondente della grandezza sempre nota (con due valori noti) e non fare il contrario.

Può risultare utile mostrare agli alunni l'uso del foglio di calcolo attività_4.xls. In questo foglio di calcolo (protetto senza password) è possibile svolgere automaticamente i calcoli relativi ai problemi del tre semplice e del tre composto. In ogni caso è necessario che lo studente individui la corretta proporzionalità tra le grandezze ed imposti il foglio in modo coerente.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 4 – Fase 1 – No problem!

Problema 1

Con 16 litri di benzina un automobile percorre 100 chilometri. Quanti chilometri percorrerà con 24 litri di benzina?

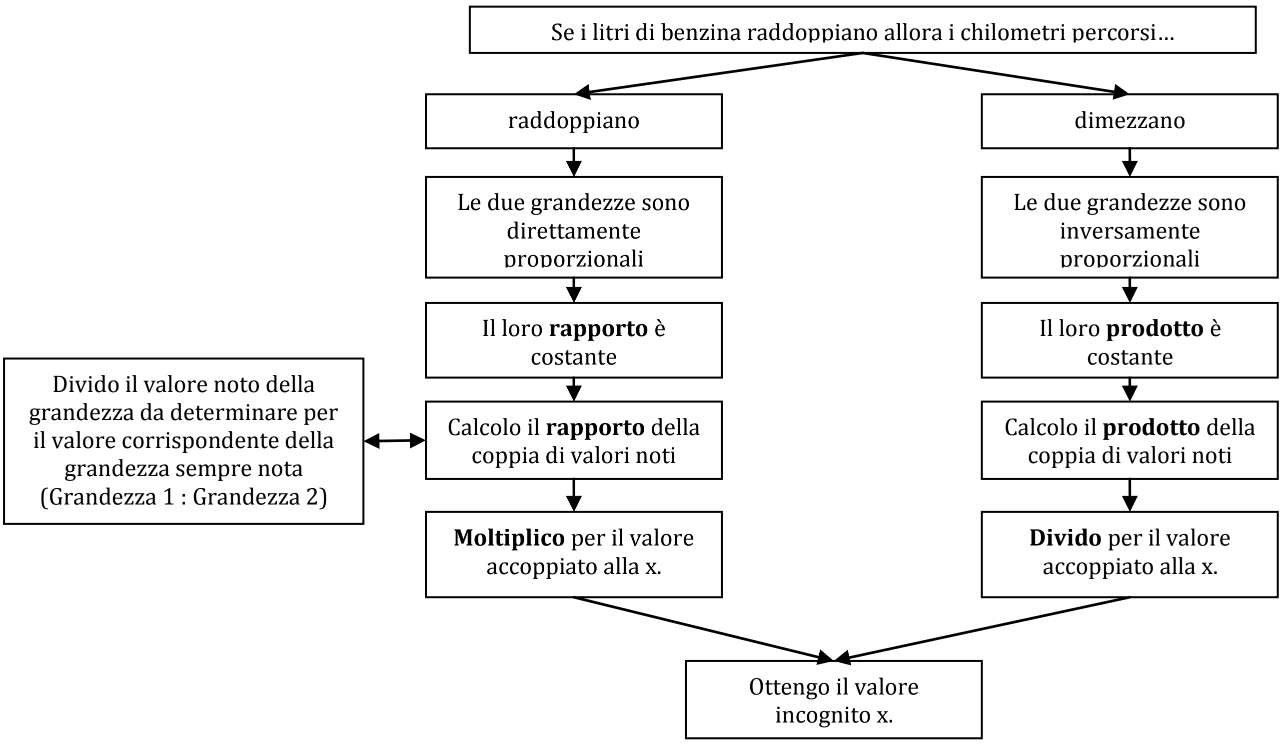
Osservazione iniziale: Per i litri di benzina abbiamo due valori conosciuti, mentre per i chilometri percorsi abbiamo un solo valore noto. Occorre determinare il valore sconosciuto dei chilometri percorsi.

Grandezza 1: Chilometri percorsi		Grandezza 2: Litri di benzina
Valore 1: _______	←Corrisponde a→	Valore 1: ________
Valore 2: x	←Corrisponde a→	Valore 2: ________

Completa la tabella usando le osservazioni stimolate dai due punti successivi.
Punto 1.1) Qual è il valore dei chilometri percorsi riportato nel problema? Inserisci il valore nella colonna relativa ai chilometri percorsi. Per il valore sconosciuto è stata inserita una x nella casella corrispondente.

Punto 1.2) Quali sono i valori in litri di benzina riportati nel problema? Inserisci questi valori nella colonna relativa ai litri di benzina. Fai attenzione a far corrispondere al valore 1 dei litri di benzina il corrispondente valore 1 dei chilometri percorsi.

Ora, scegli il percorso da seguire!



Punto 1.3) Completa le "frasi chiave".

Se i litri di benzina raddoppiano, allora i chilometri percorsi
- ☐ raddoppiano
- ☐ dimezzano

Le due grandezze sono
- ☐ direttamente proporzionali
- ☐ inversamente proporzionali

Le due grandezze hanno
- ☐ rapporto costante
- ☐ prodotto costante

Punto 1.4) Svolgi i calcoli.
In base al percorso da te scelto, calcola il rapporto o il prodotto della coppia di valori 1 conosciuti:

____

Ora, in base al percorso scelto, moltiplica o dividi per il valore 2 accoppiato al valore sconosciuto x:

____

Il risultato finale è ___________________.

Problema 2

Mario acquista 2,5 kg di mele, pagando 3,25 euro. Quanti euro costeranno 6 kg di mele?

Punto 1.5) Quali sono le due grandezze in gioco? ________________________________
Per quale grandezza (grandezza 1) conosciamo un solo valore? ___________________________
Per quale grandezza (grandezza 2) conosciamo due valori? _______________________

Punto 1.6) Completa la seguente tabella inserendo le due grandezze e i valori corrispondenti.

Grandezza 1: ______________		Grandezza 2: _______________
Valore 1: ______	←Corrisponde a→	Valore 1: _______
Valore 2: x	←Corrisponde a→	Valore 2: _______

Punto 1.7) Completa le "frasi chiave".

Se la grandezza 2 raddoppia, allora la grandezza 1
- ☐ raddoppia
- ☐ dimezza

Le due grandezze sono
- ☐ direttamente proporzionali
- ☐ inversamente proporzionali

Le due grandezze hanno
- ☐ rapporto costante
- ☐ prodotto costante

Punto 1.8) Svolgi i calcoli.
A seconda che le grandezze siano direttamente o inversamente proporzionali, calcola il rapporto o il prodotto della coppia di valori 1 conosciuti:

____

Ora moltiplica o dividi per il valore 2 accoppiato al valore sconosciuto x:

____

Il risultato finale è ___________________.

Problema 3

In un’ora di lavoro 6 pasticcieri preparano 150 bignè. Quanti pasticcieri occorrono per preparare 250 bignè in un’ora?

Punto 1.9) Risolvi il problema svolgendo i tre punti.

1. Costruisci la tabella con le corrispondenze dei valori;
2. Riporta le tre “frasi chiave”, individuando se le grandezze sono inversamente o direttamente proporzionali;
3. Individua se calcolare rapporti o prodotti e se moltiplicare o dividere per il valore associato a quello incognito, svolgi i calcoli e trova la soluzione.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 4 – Fase 2 – No problem!

Problema 1
Per coprire un pavimento occorrono 40 mattonelle quadrate, ciascuna di area pari a 225 centimetri quadrati. Quante mattonelle quadrate da 18 centimetri quadrati occorrono per ricoprire lo stesso pavimento?

Punto 2.1) Quali sono le due grandezze in gioco? _______________________________
Per quale grandezza (grandezza 1) conosciamo un solo valore? ___________________________
Per quale grandezza (grandezza 2) conosciamo due valori? _______________________

Punto 2.2) Completa la seguente tabella inserendo le due grandezze e i valori corrispondenti.

Grandezza 1: ______________		Grandezza 2: _______________
Valore 1: ______	←Corrisponde a→	Valore 1: _______
Valore 2: x	←Corrisponde a→	Valore 2: _______

Punto 2.3) Completa le "frasi chiave".

Se la grandezza 2 raddoppia, allora la grandezza 1
- ☐ raddoppia
- ☐ dimezza

Le due grandezze sono
- ☐ direttamente proporzionali
- ☐ inversamente proporzionali

Le due grandezze hanno
- ☐ rapporto costante
- ☐ prodotto costante

Punto 2.4) Svolgi i calcoli.
A seconda che le grandezze siano direttamente o inversamente proporzionali, calcola il rapporto o il prodotto della coppia di valori 1 conosciuti:
____
Ora moltiplica o dividi per il valore 2 accoppiato al valore sconosciuto x:
____
Il risultato finale è __________________.

Problema 2

Per montare una cucina 3 operai impiegano 270 minuti, quanti minuti impiegherebbero 5 operai?

Punto 2.5) Risolvi il problema svolgendo i tre punti.

1. Costruisci la tabella con le corrispondenze dei valori;
2. Riporta le tre "frasi chiave", individuando se le grandezze sono inversamente o direttamente proporzionali;
3. Individua se calcolare rapporti o prodotti e se moltiplicare o dividere per il valore associato a quello incognito, svolgi i calcoli e trova la soluzione.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 4 – Fase 3 – No problem!

Problema 1

Se quattro pasticcieri preparano 16 torte in due ore, quanti pasticcieri preparano 48 torte in 4 ore?

Punto 3.1) Quali sono le tre grandezze in gioco? ________________________________
Per quale grandezza (grandezza 1) conosciamo un solo valore? ____________________________
Per quali grandezze (grandezza 2 e 3) conosciamo due valori? _______________________

Punto 3.2) Completa la seguente tabella inserendo le tre grandezze e i valori corrispondenti. Osserva che il valore 2 della grandezza 2 viene scritto due volte; altrettanto succede per il valore 1 della grandezza 3.

Grandezza 1: ______________		Grandezza 2: _______________		Grandezza 3: _______________
Valore 1: _______	←Corrisponde a→	Valore 1: ________	←Corrisponde a→	Valore 1: ________
Valore 2: x_1=______	←Corrisponde a→	Valore 2: ________	←Corrisponde a→	Valore 1: ________
Valore 3: x_2	←Corrisponde a→	Valore 2: ________	←Corrisponde a→	Valore 2: ________

Punto 3.3) Se si considerano le prime due righe della tabella, la grandezza 3 assume sempre il valore 1. In questo caso variano solo le grandezze 1 e 2. Completa le "frasi chiave" per queste due grandezze.

Se la grandezza 2 raddoppia, allora la grandezza 1
- ☐ raddoppia
- ☐ dimezza

Le due grandezze sono
- ☐ direttamente proporzionali
- ☐ inversamente proporzionali

Le due grandezze hanno
- ☐ rapporto costante
- ☐ prodotto costante

Punto 3.4) A seconda che le grandezze siano direttamente o inversamente proporzionali, calcola il rapporto o il prodotto della coppia di valori 1 conosciuti.
____
Ora moltiplica o dividi per il valore 2 accoppiato al valore sconosciuto x_1.
____
Il valore di x_1 è ___________________. Scrivilo in tabella.

Punto 3.5) Se si considerano le ultime due righe della tabella, la grandezza 2 assume sempre il valore 2. In questo caso variano solo le grandezze 1 e 3. Completa le "frasi chiave" per queste due grandezze.

Se la grandezza 3 raddoppia, allora la grandezza 1
- ☐ raddoppia
- ☐ dimezza

Le due grandezze sono
- ☐ direttamente proporzionali
- ☐ inversamente proporzionali

Le due grandezze hanno
- ☐ rapporto costante
- ☐ prodotto costante

Punto 3.6) A seconda che le grandezze siano direttamente o inversamente proporzionali, calcola il rapporto o il prodotto della coppia di valori conosciuti (uno di essi ora è x_1).

____

Ora moltiplica o dividi per il valore 2 accoppiato al valore sconosciuto x_2.

____

Il risultato finale è x_2=___________________.

Un altro problema con tre grandezze

Per costruire un muro di 20 metri, 12 operai impiegano 15 ore. Quante ore impiegheranno la metà degli operai per costruire un muro di 30 metri?

Punto 3.7) Risolvi il problema svolgendo i tre punti.
1. Costruisci la tabella con le corrispondenze dei valori;
2. Fissa il valore della grandezza 3 e ricava x_1;
3. Fissa il valore della grandezza 2 e ricava il risultato finale.

Verifica

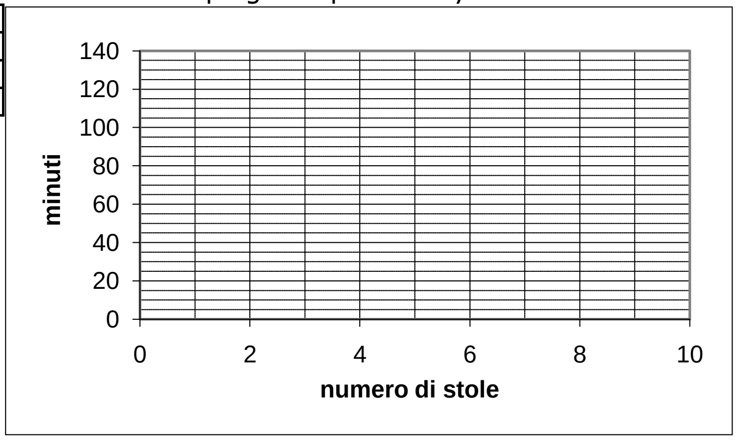
Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Consegna 1. In una elegante sartoria, un sarto produce tre stole in 39 minuti.
1) Indica se le grandezze in gioco (stole e minuti) sono direttamente o inversamente proporzionali. Se il sarto lavora incessantemente, quanto tempo impiegherà per produrre sei stole e nove stole?

2) Completa la tabella e il grafico con i dati ricavati; scrivi la relazione simbolica (la funzione) che lega il numero di stole prodotto x, al numero di minuti impiegati a produrle y.

Numero di stole x	Minuti y	Rapporto y/x	Prodotto y·x

Relazione simbolica



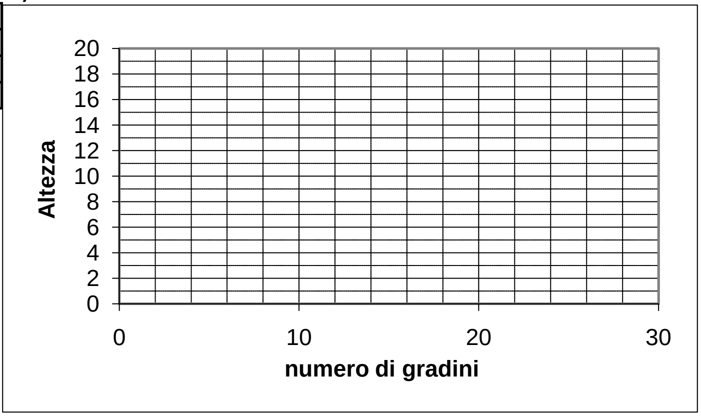
3) Determina in quanto tempo il sarto produce 16 stole.

Consegna 2. In un parco giochi vengono realizzati tre scivoli della stessa altezza. Per il primo scivolo, destinato ai bambini un po' più grandi, vengono realizzati 9 gradini alti 18 cm.
1) Indica se le grandezze in gioco (numero di gradini e altezza dei gradini) sono direttamente o inversamente proporzionali. Quanti gradini da 9 cm occorrerà realizzare nel secondo scivolo, destinato ai bambini più piccoli? Quanti gradini da 6 cm nel terzo?

2) Completa la tabella e il grafico con i dati ricavati; scrivi la relazione simbolica (la funzione) che lega il numero di gradini x, alla loro altezza y.

Numero di gradini x	Altezza y	Rapporto x/y	Prodotto x·y

Relazione simbolica



3) Determina quanti gradini da 13,5 cm occorrono per costruire uno scivolo alto quanto gli altri.

Consegna 3. Nella cucina di un grande ristorante vi sono tre rubinetti con le guarnizioni un po' consumate. Da due rubinetti in tre ore gocciolano 72 gocce d'acqua, che riempirebbero un bicchierino di plastica.

1) Quante gocce cadranno dai tre rubinetti in un'intera giornata?

2) In quanto tempo i tre rubinetti riempirebbero il bicchierino di plastica?

Attività di Recupero

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

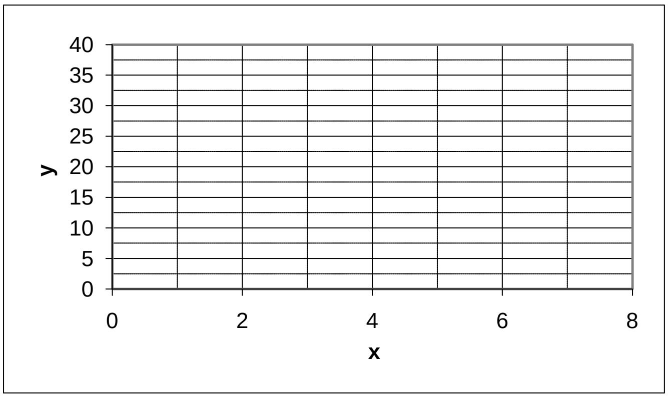
Consegna 1. Osserva i dati in tabella e determina se x e y sono direttamente o inversamente proporzionali. Determina inoltre se x e z sono direttamente o inversamente proporzionali.

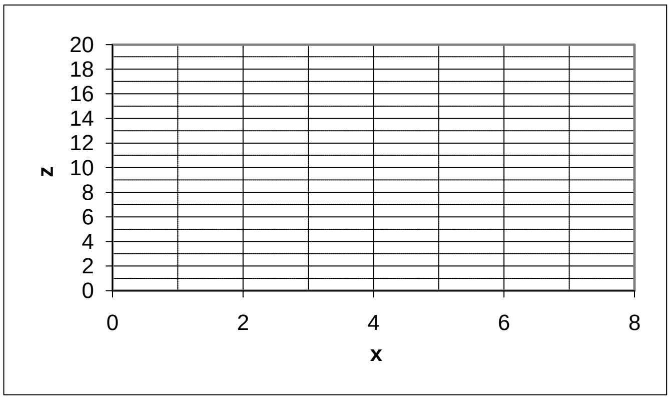
x	y	z	Rapporto y/x	Prodotto z·x
2	12	18	6	36
4	24	9	(#)	(#)
6	(*)	(*)	(#)	(#)

Consegna 2. Mediante i calcoli opportuni, inserisci i valori corretti nelle celle contrassegnate con un asterisco (*).

Consegna 3. Senza operare alcun calcolo, ma sfruttando le caratteristiche delle grandezze direttamente o inversamente proporzionali, inserisci i valori corretti nelle celle contrassegnate con un cancelletto (#).

Consegna 4. Rappresenta le coppie di valori x e y e le coppie di valori x e z nei grafici sottostanti. Scrivi la relazione simbolica che lega x e y e quella che lega x e z.

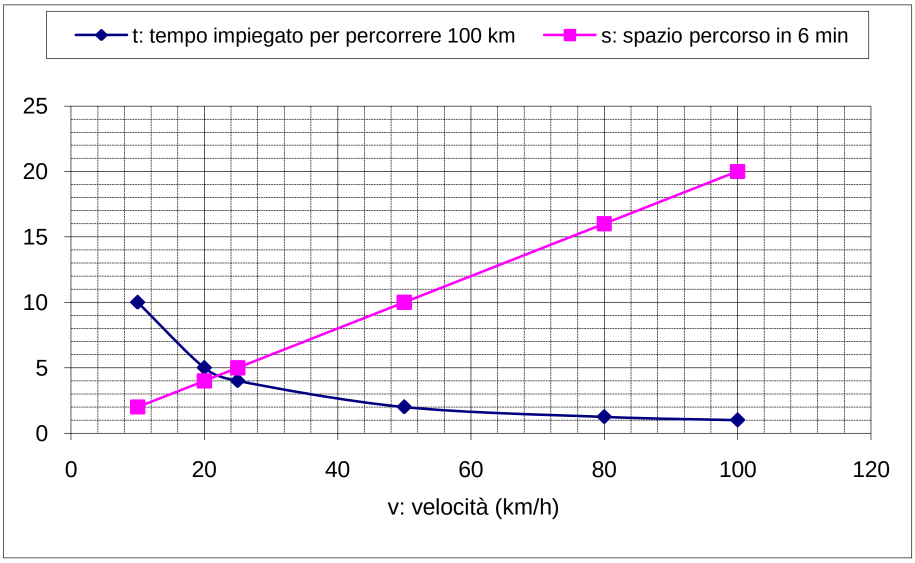




Consegna 5. Determina i valori di z e y quando x vale 3.

Attività di Rinforzo

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***



Consegna 1. Considera il grafico in figura e riporta i dati del grafico nella tabella seguente.

Velocità (km/h)	Tempo impiegato (h)	Spazio percorso (km)

Consegna 2. Determina le rappresentazioni simboliche (le funzioni) che legano
a) la velocità v e il tempo impiegato t, nella forma t=…;
b) la velocità v e lo spazio percorso s, nella forma s=….

Consegna 3. Quanto tempo impiegherà l'auto per percorrere 100 km, procedendo con una velocità di 120 km/h?

Consegna 4. Quanto spazio percorrerà l'auto in 6 minuti, procedendo ad una velocità di 120 km/h?

Attività di Approfondimento

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Esperimento: La legge di Hooke
Materiali: Un elastico di caucciù, un supporto cui appendere l'elastico in posizione verticale, alcuni pesi muniti di ganci da appendere all'elastico, un righello, una bilancia (qualora i pesi non fossero noti).

l_0= cm			
***l* (lunghezza in cm)**	***x=l-l*$_0$ (allungamento in cm)**	***P* (peso in grammi)**	**Valore k**

Consegna 1. Appendi l'elastico al supporto; accosta il righello all'elastico e misurane la lunghezza quando non sorregge alcun peso (lunghezza a riposo l_0). Riporta la lunghezza l_0 nella tabella.

Consegna 2. Appendi un peso noto P all'elastico che quindi si allungherà. Misura la lunghezza dell'elastico *l* e calcola l'allungamento dell'elastico $x=l-l_0$ (la lunghezza attuale meno quella a riposo). Ripeti la procedura con altri pesi. Riporta i dati nella tabella.

Rispondi alle seguenti domande.
Consegna 3. Individua due grandezze in gioco che sono inversamente o direttamente proporzionali.

Consegna 4. Scrivi la relazione che lega queste due grandezze, indicando con k il valore costante (il rapporto oppure il prodotto, dipende dal tipo di proporzionalità).

Hai appena ricavato la Legge di Hooke. Riporta il valore k nella quarta colonna della tabella.

Consegna 5. Rappresenta le due grandezze in un grafico.

Consegna 6. Riesci a prevedere quale sarà l'allungamento della molla con un peso pari al doppio di uno di quelli utilizzati, senza appenderlo alla molla? Verifica sperimentalmente la previsione.

Esempi di Prove internazionali[1]

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

1) Un ragazzo prepara la limonata utilizzando questa ricetta:

Dosi per 4 persone	1 litro di acqua	30 g di zucchero	4 limoni

Quali dosi deve utilizzare per preparare la limonata per 6 persone?

A.	Dosi per 6 persone	2 litri di acqua	60 g di zucchero	6 limoni
B.	Dosi per 6 persone	1,5 litri di acqua	45 g di zucchero	6 limoni
C.	Dosi per 6 persone	1,5 litri di acqua	60 g di zucchero	8 limoni
D.	Dosi per 6 persone	2 litri di acqua	45 g di zucchero	8 limoni

2) Su una confezione di succo di frutta da 250 ml trovi le seguenti informazioni nutrizionali:

INFORMAZIONI NUTRIZIONALI	Valori medi per 100 ml
Valore energetico	54 kcal – 228 kJ
Proteine	0,3 g
Carboidrati	13,1 g
Grassi	0,0 g

Quante kcal assumi se bevi tutto il succo di frutta della confezione?
A. 54
B. 135
C. 228
D. 570

3) Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in cm) secondo la seguente formula:

$$p = \frac{1}{15} d^2$$

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro	☐	☐
b.	Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro	☐	☐
c.	Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15	☐	☐

[1] Si riportano le fonti di ciascun quesito:
1) Quesito D12 della prova 2009 dell'esame di stato della scuola secondaria di primo grado.
2) Quesito D1 della prova 2010 dell'esame di stato della scuola secondaria di primo grado.
3) Quesito D9 della prova 2010 dell'esame di stato della scuola secondaria di primo grado.
4) Quesito L14 della prova TIMSS 1995 per l'ottavo grado di scolarizzazione (traduzione dall'inglese a cura dell'autore).
5) Quesito M012004 della prova TIMSS 2003 per l'ottavo grado di scolarizzazione (traduzione dall'inglese a cura dell'autore).
6) Quesito M032533 della prova TIMSS 2003 per l'ottavo grado di scolarizzazione (traduzione dall'inglese a cura dell'autore).

4) La tabella mostra i valori di x e y, dove x è proporzionale ad y.

x	3	6	P
y	7	Q	35

Quali sono i valori di P e Q?
A. P=14 e Q=31
B. P=10 e Q=14
C. P=10 e Q=31
D. P=14 e Q=15
E. P=15 e Q=14

5) Alice è in grado di completare 4 giri di una pista nello stesso tempo in cui Carol può completarne 3. Quando Carol ha percorso 12 giri, quanti giri avrà portato a termine Alice?
A. 9
B. 11
C. 13
D. 16

6) Un macchinario consuma 2,4 litri di benzina per funzionare 30 ore. Quanti litri di benzina consumerà per funzionare 100 ore?
A. 7,2
B. 8,0
C. 8,4
D. 9,6