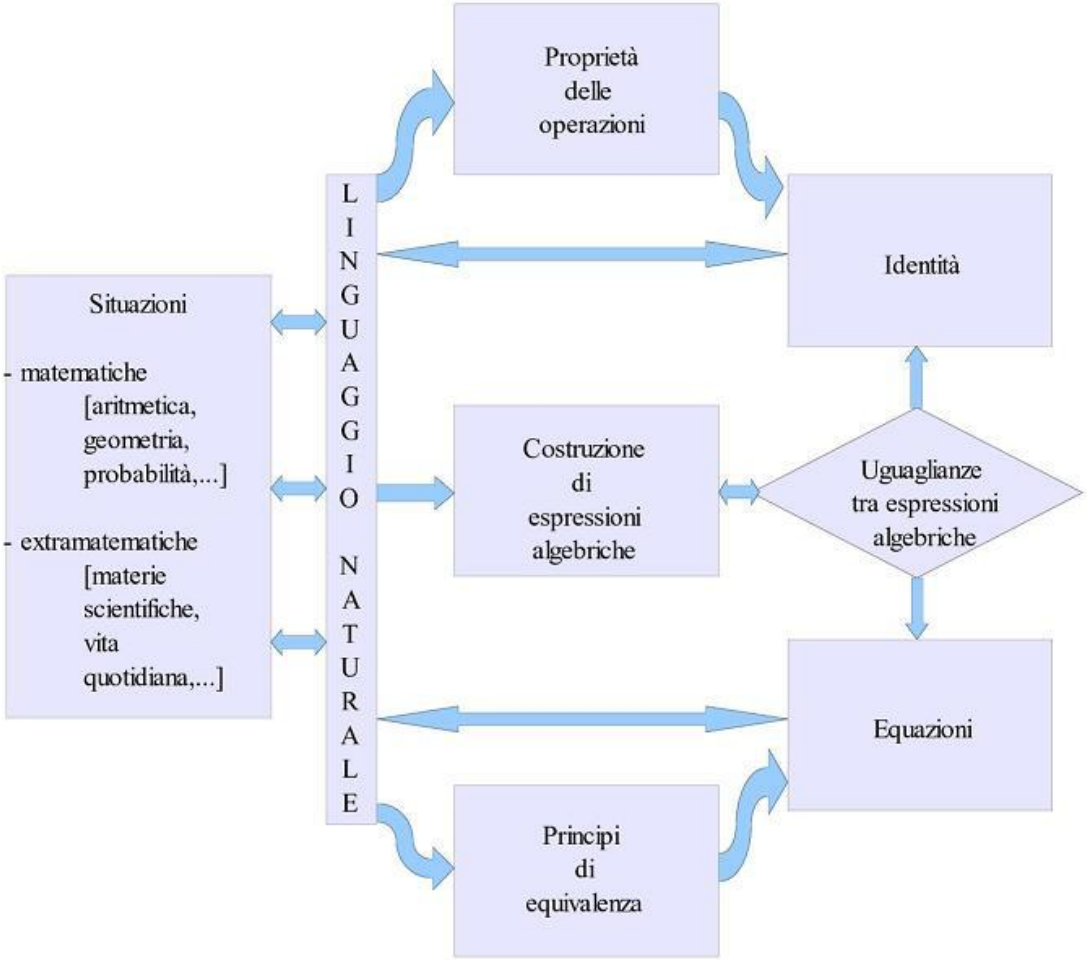
PQM Piano Nazionale Qualità e Merito 2011/2012
Una scuola di qualità, per tutti

Il linguaggio algebrico

Maurizio Berni

Nuclei: Numeri – Relazioni e Funzioni

"IL LINGUAGGIO ALGEBRICO" - MAPPA CONCETTUALE



Introduzione

Tematica:

Il percorso si inserisce nel delicato passaggio dall'aritmetica all'algebra. Poiché la recente ricerca didattica conferma le impressioni dei docenti di rottura di una continuità tra aritmetica e algebra, con conseguente perdita di significato, il percorso prevede attività di introduzione al linguaggio algebrico con situazioni, in parte note, di aritmetica, di geometria, volendo anche di probabilità, mantenendo un forte legame con il linguaggio naturale.

Finalità e obiettivi formativi:

Il percorso si colloca all'interno dei nuclei tematici "Numeri" e "relazioni e Funzioni", e ha come oggetti di valutazione quelli contenuti nella seconda colonna della seguente tabella (si veda il Quadro di riferimento INVALSI per la matematica): le abilità sono contenute nella terza colonna (si veda, come modello, lo schema contenuto nell'Asse matematico delle Indicazioni Nazionali di cui all'Allegato Tecnico del DM 22/08/2007 n. 139, colonna Abilità/Capacità)

Nucleo tematico	Contenuti (conoscenze)	Abilità (l'alunno è in grado di...)
Numeri	• Addizione, moltiplicazione e divisione fra numeri naturali • Numeri decimali e frazioni • Frazioni equivalenti • Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali • Proprietà delle operazioni • Potenze di numeri naturali • Multipli e divisori; massimo comun divisore tra due numeri • Numeri primi • Numeri decimali limitati e illimitati periodici (rappresentazione decimale e frazionaria)	• effettuare calcoli mentali mediante opportune strategie • riconoscere la divisione con resto tra numeri naturali come sottrazione ripetuta • saper trasformare consapevolmente un numero decimale (limitato o periodico) in frazione e viceversa • saper enunciare, anche in forma simbolica, le proprietà delle operazioni e delle potenze • saper definire multipli e divisori; saper definire il massimo comun divisore tra due numeri naturali non entrambi nulli; • saper determinare il massimo comun divisore di numeri naturali (anche 'alti') con l'algoritmo euclideo • saper utilizzare l'algoritmo euclideo per semplificare frazioni
Relazioni e funzioni	• Rappresentazioni e generalizzazioni attraverso parole, formule ed espressioni algebriche • Equazioni di primo grado	• trasformare una frase, che in linguaggio naturale esprime una sequenza di operazioni su grandezze incognite, in una opportuna espressione algebrica • trasformare una legge, che esprime una relazione tra grandezze incognite, in una opportuna formula • utilizzare consapevolmente le proprietà delle operazioni per effettuare manipolazioni di espressioni algebriche finalizzate a scopi prefissati. • Data una formula in forma di equazione, manipolarla algebricamente per ricavarne le cd "formule inverse", ovvero per individuarne l'insieme delle soluzioni

INDICE

Descrizione del modulo

Attività 1 - Operazioni "difficili" (Indicazioni per il docente)

Attività 1- Operazioni "difficili" (Scheda per lo studente)

Scheda di approfondimento- il quadrato dei numeri che finiscono con 5 (Scheda per lo studente)

Attività 2 - Dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni (Indicazioni per il docente)

Attività 2 - Dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni (Scheda per lo studente)

Scheda di approfondimento - Dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni (Scheda per lo studente)

Attività 3 - Sottrazioni, divisioni, e massimo comun divisore (senza scomposizioni) (Indicazioni per il docente)

Attività 3 - sottrazioni, divisioni, e massimo comun divisore (senza scomposizioni) (Scheda per lo studente)

Scheda di riepilogo delle attività 2 e 3 - espressioni coi numeri periodici (Scheda per lo studente)

Attività 4 - Ridisegnare i confini (Indicazioni per il docente)

Attività 4 - Ridisegnare i confini (Scheda per lo studente)

Scheda di approfondimento - il linguaggio di Euclide (Scheda per lo studente)

Attività di Approfondimento -La probabilità coi polinomi (Indicazioni per il docente)

Attività di Approfondimento -La probabilità coi polinomi (Scheda per lo studente)

Verifica

Attività di Recupero

Esempi di Prove internazionali

Descrizione del modulo

Condizione, problema o stimolo da cui nasce l'attività

Per una corretta introduzione all'algebra, è opportuno preliminarmente porre l'accento sulle proprietà delle operazioni tra numeri; esse vengono utilizzate, spesso inconsapevolmente, in tutti gli algoritmi di calcolo "a mano", come le operazioni in colonna. Un modo per mettere in luce le proprietà, in particolare l'associativa e la commutativa della moltiplicazione, e la distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, è quello di assegnare calcoli tra numeri "alti", opportunamente scelti, che non possono essere effettuati con la calcolatrice; questo induce la ricerca di strategie che passano, appunto, attraverso l'uso delle proprietà (prima scheda). Una volta sensibilizzati i ragazzi alla presenza e all'importanza di queste proprietà, si può avviare un percorso di presa di coscienza dell'uso di esse negli algoritmi di calcolo appresi nella scuola elementare (seconda scheda); questo vale in particolare per la moltiplicazione. Gli algoritmi vengono "smontati" nelle loro operazioni elementari (cioè addizioni e moltiplicazioni tra coppie di numeri compresi tra 0 e 9), e il numero di tali operazioni mette in luce le modalità di calcolo coi polinomi; ad esempio il tipico prodotto notevole del quadrato di un binomio, visto come estensione alle lettere del quadrato di un numero intero di due cifre, sarà il risultato di quattro prodotti elementari (proprietà distributiva) e di una somma elementare (nel caso numerico potrebbe esserci la "complicazione" di un riporto; il caso letterale è quindi di complessità minore o uguale di quella numerica, paradossalmente).

Le altre esperienze proposte nel modulo (vedi fasi e tempi) introducono gradualmente all'uso delle lettere in vari contesti (equazioni, utilizzate per trovare la frazione generatrice di un numero periodico, indirizzi di memoria, come nel calcolatore, utilizzati per il calcolo del massimo comun divisore con l'algoritmo euclideo; indeterminate, utilizzate nell'attività di algebra geometrica; variabili, utilizzate nell'attività di approfondimento di probabilità). Via via che si svilupperanno le varie attività, le proprietà delle operazioni, sempre presenti sotto traccia, verranno spesso esplicitate, per mostrarne tutte le potenzialità; in particolare l'algoritmo euclideo è un'applicazione, semplice e geniale, della proprietà distributiva. Esso permette di trovare il massimo comun divisore tra numeri anche molto alti, senza effettuare la scomposizione in fattori.

L'attività di calcolo delle probabilità coi polinomi è presentata come approfondimento, in quanto richiede dei prerequisiti piuttosto avanzati: l'interpretazione della somma di probabilità come probabilità dell'evento unione di due eventi incompatibili, e l'interpretazione del prodotto di probabilità, come probabilità dell'evento intersezione di due eventi indipendenti. Tuttavia i due concetti, molto delicati, sono richiamati all'inizio della scheda-studente, prima della formulazione delle consegne, e l'attività proposta può consolidare il possesso di tali prerequisiti.

Prerequisiti richiesti ai ragazzi per svolgere l'attività

I prerequisiti sono legati alle singole attività proposte nel modulo (si veda il successivo paragrafo "fasi e tempi"): tali attività sono ordinate in modo tale da richiedere prerequisiti dai più elementari ai più complessi; i primi devono essere consolidati; quelli successivi possono anche essere rinforzati con le attività proposte.

Prerequisiti	Attività 1	Attività 2	Attività 3	Attività 4	Attività 5
Conoscere le tabelline	X	X			
saper effettuare addizioni e moltiplicazioni in colonna (di numeri interi)		X			
saper effettuare la divisione con resto con l'eventuale aiuto di una calcolatrice			X		
Conoscere i numeri interi relativi			X		
Conoscere i vari tipi di rappresentazione decimale di un numero (numero decimale finito; periodico semplice e misto; aperiodico)		X			
Saper individuare il monomio somma (algebrica) di due monomi simili, in casi semplici		X			
Saper invertire la formula $ax=b$		X			
Sapere e saper utilizzare il fatto che la sottrazione tra due numeri con la stessa parte decimale (limitata o illimitata) è un numero intero		X			
saper applicare la proprietà distributiva a semplici espressioni per uno scopo prefissato (evidenziare proprietà, risolvere equazioni...)		X	X		
Saper costruire semplici espressioni algebriche che rappresentano grandezze geometriche di figure con dati letterali				X	
Saper interpretare la somma di probabilità come probabilità dell'evento unione di eventi incompatibili					X
Saper interpretare il prodotto di probabilità come probabilità dell'evento intersezione di eventi indipendenti					X
Saper effettuare calcoli con numeri espressi in forma percentuale					X

Strumenti forniti agli allievi

- Ogni attività prevede l'utilizzo di una **scheda-studente** che verrà fornita ad ogni allievo.
- Per la compilazione delle schede è opportuno che gli allievi siano dotati di **qualche matita o penna colorata**; sono sufficienti tre colori, tipo rosso, blu e nero.
- La **calcolatrice tascabile** sarà sempre consentita; è opportuno che siano gli stessi allievi a realizzare, per esempio, che nella prima attività è impossibile utilizzarla, mentre per la terza (algoritmo euclideo), diventa molto utile se si vuole operare con numeri molto alti; ed è bene stimolare i numeri ad usare numeri molto alti per apprezzare appieno la potenza di questo algoritmo.
- E' poi opportuno che gli allievi abbiano a disposizione dei **computer** (laboratorio di informatica, o, in alternativa, portatili in classe, o computer a casa) per poter utilizzare dei programmi in javascript presenti in rete (vedi sitografia); non è necessario lavorare on-line; i file possono essere scaricati e utilizzati dagli studenti anche localmente.

Organizzazione della classe

I vari momenti richiedono una diversa organizzazione della classe. Le attività proposte prevedono consegne da affrontare:

- **individualmente**; si tratta per lo più di preparare il materiale per la successiva discussione in gruppo o a classe intera;
- **in gruppo**; il gruppo può essere piccolo (anche una coppia) o più grande, fino a quattro persone; è importante la suddivisione in gruppi il più possibile omogenei tra loro ed eterogenei al loro interno, per creare una dinamica ottimale della comunicazione. Per la responsabilizzazione dei singoli membri dei gruppi, è opportuno che le schede per lo studente siano distribuite a tutti i membri; è inoltre opportuno assegnare ad ogni membro del gruppo un ruolo (verbalizzatore, moderatore, espositore alla classe...) per favorire la responsabilizzazione; i lavori di gruppo terminano sempre con la fase successiva, della discussione a classe intera
- **a classe intera**; la discussione a classe intera, sotto la guida e la moderazione del docente, è il momento della condivisione delle conoscenze acquisite. Essa può essere posta all'inizio dell'attività, come verifica informale dei prerequisiti; è sempre presente al termine delle attività, per la sistematizzazione dei contenuti affrontati, e può essere alternata da momenti di lezione frontale.

Fasi e tempi

Si propongono quattro attività, ognuna delle quali è articolata in varie consegne, di 3-4 ore ciascuna. Si propone infine una quinta attività di approfondimento, della stessa durata.

Nome dell'attività	durata (presunta)
1. operazioni “difficili”	3
2. dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni	4
3. sottrazioni, divisioni, e massimo comun divisore (senza scomposizioni)	4
4. ridisegnare i confini	4
5. (approfondimento) la probabilità coi polinomi	4

Bibliografia

Berni, M.: (1999) I resti delle divisioni, parte I: Algoritmo euclideo, criteri di divisibilità, *Scuola e Didattica*, n. 6, pagg. 39-42;

Berni, M.: (1999) I resti delle divisioni, parte II: i numeri periodici, *Scuola e Didattica*, n. 9, pagg. 47-48 e 65.

Childs, L. (1979), *Algebra. Un'introduzione concreta*, edizione italiana a cura di Carlo Traverso, ETS Editrice, Pisa, 1989; trad. it. di *A concrete introduction to higher algebra*, Springer-Verlag, New York, 1979

Frajese A., Maccioni M. (a cura di) (1976), *Euclide, Gli elementi*, Utet, Torino, ristampa 1996

Sarti, S. D.: (1995) Polinomi per contare (I), *La Matematica e la sua Didattica*, Vol. Numero 4 , pp. 470-480;

Sarti, S. D.: (1996) Polinomi per contare (II), *La Matematica e la sua Didattica*, Vol. Numero 1 , pp. 33-45

Villani, V. (2003). *Cominciamo da Zero – Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Aritmetica e Algebra).* Pitagora Editrice, Bologna 2003.

Sitografia

Programmi in Javascript per l'aritmetica
http://www.e-santoni.org/progetti/leonardo_06-07/informatica.html

In questa pagina sono raccolti alcuni programmi scritti in linguaggio Javascript per l'aritmetica, utili in particolare per le attività 2 e 3. Possono essere scaricati ed eseguiti senza bisogno di mantenersi collegati ad internet.
(Agosto 2011)

INVALSI
www.invalsi.it

Il sito dell'Invalsi permette di consultare tutti i documenti relativi alle valutazioni predisposte dall'Istituto (quadri di riferimento, domande rilasciate, analisi e rapporti) nonché di accedere alla documentazione (spesso tradotta in italiano) relativa alle principali analisi internazionali. (Giugno 2011)

UMI (Unione Matematica Italiana)
umi.dm.unibo.it

Il sito della più importante Associazione di Matematica Italiana; tra le commissioni permanenti dell'UMI si segnala la CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica). Il sito dell'UMI ha molti materiali di interesse didattico, tra cui atti di convegni di didattica, e le pubblicazioni MAT2001 e MAT2003, contenenti i materiali didattici utilizzati, tra l'altro, nel progetto M@tabel.
(agosto 2011)

Attività 1 – Operazioni "difficili"

Indicazioni per il docente

Tipologia: Attività di *problem solving* aritmetico. ***Tempo***: **3** ore (indicative)

Obiettivo didattico: rendere consapevoli dell'uso continuo e ripetuto di proprietà nell'eseguire operazioni; l'obiettivo costituisce prerequisito per il calcolo letterale; in prospettiva, si dovrebbe sostituire la consuetudine di impartire "regole per il calcolo letterale" con l'utilizzo consapevole delle proprietà delle operazioni.

Consegna 1
La consegna chiede di eseguire operazioni con numeri molto alti, che non è possibile impostare sulla calcolatrice; è importante lasciare la calcolatrice in mano ai ragazzi, e far loro constatare l'impossibilità di utilizzarla nel modo usuale; i numeri sono scelti in modo opportuno da consentire di trovare il risultato mentalmente, utlizzando in modo strategico le proprietà delle operazioni. La prima espressione richiede l'uso delle proprietà associativa e commutativa; la seconda richiede l'uso della distributiva. Al termine queste proprietà verranno esplicitate.

Consegna 2
Viene chiesto di riconoscere, nell'algoritmo della moltiplicazione tra numeri di più cifre, quali e quante sono le operazioni elementari che vengono eseguite, intese come addizioni o moltiplicazioni tra numeri da zero a nove. L'attività è propedeutica alla moltiplicazione di polinomi. L'uso di tali operazioni elementari si giustifica ancora una volta con le proprietà delle operazioni, in particolare la distributiva, applicata ai fattori scritti in forma polinomiale. É lasciato alla discrezionalità del docente il rilievo da porre in questa circostanza. L'obiettivo centrale qui è "contare" le operazioni elementari. In questa attività emergono anche gli elementi neutri dell'addizione e della moltiplicazione, che l'insegnante avrà cura di definire e far annotare.

Consegna 3
La discussione ha l'obiettivo di costruire in modo condiviso una tabella con le proprietà delle operazioni fin qui utilizzate, su cui i ragazzi sono stati sensibilizzati; ad esempio:

addizione	moltiplicazione
commutativa $a+b=b+a$	commutativa $a\cdot b=b\cdot a$
associativa $(a+b)+b=a+(b+c)$	associativa $(a\cdot b)\cdot b=a\cdot(b\cdot c)$
esistenza dell'elemento neutro $a+0=a$	esistenza dell'elemento neutro $a\cdot 1=a$
distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione $a\cdot(b+c)=a\cdot c+b\cdot c$	

Consegna 4 (approfondimento)
Il quadrato di un numero che termina per 5 si può calcolare "a mente", almeno nei casi più semplici: se per esempio il numero ha due cifre, basta moltiplicare la cifra delle decine per il numero successivo, e aggiungere (in senso posizionale) 25; per esempio il quadrato di 85 è uguale a: 8x9=72, quindi 7225. La consegna, che al termine dell'attività sulle proprietà delle operazioni, può essere proposta alle eccellenze, o, a discrezione del docente, anche alla classe intera come discussione collettiva, è quella di capire il perché; è sufficiente scrivere il numero in forma polinomiale $10a+5$, ed elevare al quadrato l'espressione generalizzando i ragionamenti fatti durante l'esecuzione della consegna n. 2. **Non è richiesta la conoscenza del prodotto notevole "quadrato del binomio"** come prerequisito; anzi, questa conoscenza (senza il riconoscimento esplicito delle proprietà delle operazioni) va in parte a snaturare il senso di questa consegna. La soluzione corretta, alla quale i ragazzi possono avvicinarsi, è:

$$(10a+5)^2=(10a+5)\cdot(10a+5)=100a^2+50a+50a+25=100a^2+100a+25=100a\cdot(a+1)+25$$

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 1- Operazioni "difficili

Al termine della proposta didattica, di cui questa è la prima attività, vogliamo arrivare a capire se le **proprietà delle operazioni** servono davvero, o se sono solo questioni teoriche. Quando non basta lo spazio a disposizione sulla scheda, puoi allegare un foglio aggiuntivo.

Consegna 1. Si possono eseguire le operazioni seguenti?

$$8 \cdot 777777777777777777777777777 \cdot 125$$

$$123456789 \cdot 555555555555555555555 + 987654321 \cdot 555555555555555555555$$

Se no, spiega perché, se sì, spiega come hai fatto.

Hai utilizzato qualche proprietà delle operazioni per risolvere o tentare di risolvere le espressioni? Quali proprietà ti sono venute in mente?

Consegna 2. In questa consegna chiameremo **operazione elementare** l'addizione o la moltiplicazione tra due numeri di una cifra, cioè compresi tra 0 e 9; andremo a contare quante operazioni elementari occorrono per eseguire un'operazione qualsiasi.

Calcola in colonna e scrivi il numero delle operazioni elementari eseguite			
$12\times¿$ $¿2=$	Moltiplicazioni elementari n. …. Addizioni elementari n. ….	$11\times¿$ $¿11=$	Moltiplicazioni elementari n. …. Addizioni elementari n. ….
$12\times¿$ $¿23=$	Moltiplicazioni elementari n. …. Addizioni elementari n. ….	$25\times¿$ $¿25=$	Moltiplicazioni elementari n. …. Addizioni elementari n. ….
$45\times¿$ $¿45=$	Moltiplicazioni elementari n. …. Addizioni elementari n. ….	$75\times¿$ $¿75=$	Moltiplicazioni elementari n. …. Addizioni elementari n. ….

C'è un legame tra il numero delle moltiplicazioni elementari e il numero di cifre dei fattori; quale? Perché è più difficile trovare un legame preciso con il numero delle addizioni elementari?

Secondo te quali proprietà delle operazioni si utilizzano per poter eseguire le moltiplicazioni in colonna? Giustifica la risposta

Guarda i risultati delle ultime tre moltiplicazioni: si tratta dei quadrati di alcuni numeri che hanno 5 come ultima cifra: che cosa noti nei risultati?

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Scheda di approfondimento – il quadrato dei numeri che finiscono con 5

Consegna 3. Per calcolare mentalmente (e rapidamente) il quadrato di un numero che termina con la cifra 5, si può usare questo trucco:

- si moltiplica il numero delle decine per il numero successivo
- si accosta il numero 25 al risultato

Per esempio:, per calcolare 75^2 basta calcolare $7\times 8=56$ e accostare a destra il gruppo di cifre 25: 5625. Perché? Prova a spiegarlo scrivendo il numero che finisce per 5 in forma polinomiale: $(10a+5)^2=(10a+5)\cdot(10a+5)=\ldots$

Quali proprietà delle operazioni hai utilizzato, e in che modo?

Attività 2 – Dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni

Indicazioni per il docente

Tipologia: Attività di scoperta guidata in campo aritmetico. ***Tempo***: 4 ore (indicative)

Obiettivo didattico: Riconoscere la possibilità di trasformare un qualsiasi numero decimale finito o periodico in frazione, attraverso la scoperta guidata; in particolare: individuare e saper giustificare una procedura sensata per trasformare un numero periodico in frazione.

Consegna 1
La prima consegna chiede di verificare se è possibile effettuare varie operazioni tra numeri periodici, e di segnalare le difficoltà incontrate. Essa ha lo scopo di mostrare gli svantaggi di questo tipo di rappresentazione, a meno che non si tratti di sottrazioni tra numeri con la stessa parte decimale, il cui risultato è un numero intero. La consegna persegue due fini: il primo è quello di focalizzare sull'operazione (la sottrazione), che consentirà di trasformare i numeri periodici in frazione; eseguendo poi le stesse operazioni con i numeri scritti in forma frazionaria, i ragazzi percepiranno il notevole vantaggio di quest'ultima per i calcoli; mettere in evidenza questo vantaggio è opportuno perché i ragazzi generalmente presentano resistenze nei confronti della forma frazionaria dei numeri razionali, e tendono a preferire quella decimale.

Consegna 2
Viene chiesto di osservare il comportamento dei numeri decimali quando li si moltiplica per potenze di 10: nel caso finito si ottengono da un certo punto in poi dei numeri interi; nel caso periodico si ottengono sempre numeri periodici. La consegna prosegue chiedendo se si possano trovare multipli dei numeri periodici che diventino interi; tenendo conto di quanto visto nella consegna 1, si raggiunge l'obiettivo. Il metodo, ben noto, viene presentato in forma di scoperta guidata.

Consegna 3 (approfondimento) – La regola
Se i ragazzi hanno compreso il senso delle consegne 1 e 2, dovrebbero essere in grado di ricavare le frazioni generatrici di un qualsiasi numero razionale in forma decimale. Tuttavia, anche in vista dello sviluppo di competenze linguistiche, può essere opportuno proporre un'attività che riassuma quanto visto e che richieda ai ragazzi di esplicitare essi stessi una regola operativa. La scheda termina con l'esplorazione di una situazione particolare: i numeri con periodo 9. E' opportuno proporre la scheda della regola dopo avere effettuato altri esercizi, oltre a quelli proposti nelle consegne 1 e 2. La regola si basa sulle seguenti considerazioni:

- Un numero *x*, periodico semplice con periodo di *n* cifre, si trasforma in un numero con la stessa parte decimale se lo si moltiplica per 10^n ; quindi per ottenere un numero intero *x* deve essere moltiplicato per 10^n-1 , cioè per un numero formato da *n* cifre uguali a 9
- un numero *x*, periodico misto con antiperiodo di lunghezza *m*, si trasforma in un numero periodico semplice se si moltiplica per 10^m ; dopodiché si ricade nel caso precedente

In sintesi un numero periodico con antiperiodo di lunghezza *m* e periodo di lunghezza *n* si trasforma in un numero intero se viene moltiplicato per $10^m(10^n-1)$, da cui la nota regola delle *n* cifre 9 seguite da *m* cifre 0 al denominatore.

L'attività 2 può essere accompagnata da un'esplorazione dei fenomeni dei numeri periodici con l'aiuto del computer. Per esempio su http://www.e-santoni.org/progetti/leonardo_06-07/materiali/programmi_javascript/divisione_lunga.htm si trova un semplice programma che consente di calcolare la divisione "lunga" tra due numeri interi, mettendone in evidenza il periodo, anche in casi in cui il periodo è talmente lungo da non essere messo in evidenza dalla calcolatrice. Su Berni (1999) vengono messe in luce alcune particolarità delle frazioni con denominatore 7; anche quelle con denominatore potenza di 7, come 1/49 e 1/343, danno periodi lunghissimi, di 42 e 294 cifre rispettivamente, visibili con il software. Per un approfondimento della teoria (e quindi una spiegazione di questi fenomeni, non accessibile ai ragazzi) occorre rifarsi all'aritmetica delle classi di resto moltiplicative; per questo si può consultare il libro di Childs (1979), pp. 228-234.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 2- Dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni

Al termine di questa seconda attività, vogliamo arrivare a capire se e come un numero decimale può essere trasformato in frazione. Se non basta lo spazio per le soluzioni puoi allegare un foglio aggiuntivo.

Consegna 1. Si possono eseguire le operazioni seguenti?

operazione	È possibile? (SI/NO)	Risultato	È un numero intero?(SI/NO)	Difficoltà incontrate
$0,\overline{3}+0,\overline{4}$				
$0,\overline{3}+0,7$				
$1,\overline{3}-0,\overline{3}$				
$0,1\overline{6}-0,\overline{16}$				
$0,\overline{3}\times 0,\overline{4}$				
$0,\overline{3}+0,4$				
$1,\overline{2}:0,\overline{45}$				
$1,\overline{2}-0,1\overline{2}$				
$2,\overline{38}-0,\overline{38}$				
$2,\overline{38}+0,\overline{38}$				
$2,\overline{38}\times 0,\overline{38}$				

Sapresti descrivere in quali casi hai ottenuto un numero intero e perché?

Consegna 2. Moltiplichiamo un numero decimale per 10, 100, 1000,...

Completa la seguente tabella, e sottolinea in rosso i numeri interi ottenuti, e in blu le coppie di numeri della stessa riga con la stessa parte decimale.

x	$10x$	$100x$	$1.000x$	$10.000x$
$0,75$				
$0,175$				
$1,0625$				
$0,\overline{3}$				
$0,\overline{27}$				
$0,1\overline{36}$				
$1,08\overline{3}$				
$0,20\overline{45}$				
$0,20\overline{45}$				
$1,958\overline{3}$				

Osservando bene la tabella, è possibile trovare, per ogni numero x, un opportuno multiplo che lo fa diventare un numero intero; grazie a questo, ricavando x, si ottiene la frazione corrispondente, che può successivamente essere ridotta ai minimi termini.
[Suggerimento: per compilare la riga di $0,\overline{3}$, riguarda la consegna n. 1]

x	Operazione effettuata sui multipli di x della tabella precedente	Multiplo di x ottenuto		numero intero ottenuto	x espresso in frazione
$0,75$	nessuna	$100x$	=	75	$x=75/100$
$0,175$					
$1,0625$					
$0,\overline{3}$					
$0,\overline{27}$					
$0,1\overline{36}$					
$1,08\overline{3}$					
$0,20\overline{45}$					
$0,20\overline{45}$					
$1,958\overline{3}$					

In conclusione: spiega che cosa succede moltiplicando per potenze di 10 i numeri decimali finiti e che cosa succede moltiplicando, sempre per potenze di dieci, i numeri decimali periodici:

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Scheda di approfondimento sull'Attività 2

Dai numeri periodici alle frazioni attraverso le equazioni

Consegna 3. Con questa scheda di approfondimento vogliamo provare ad esprimere una regola pratica per trasformare un numero decimale in frazione. Ricordiamo che il gruppo delle cifre posto dopo la virgola e prima del periodo si chiama **antiperiodo**.

Primo caso: numeri decimali finiti: scrivi qui gli esempi e i calcoli che ti servono per trovare la regola	Scrivi qui la regola
Secondo caso - numeri decimali periodici semplici: scrivi qui di seguito gli esempi e i calcoli che ti servono per trovare la regola; osserva bene quali sono le cifre che compaiono al denominatore e cerca di capire il perché.	Scrivi qui la regola: si può formulare in modo che si basi solo sul numero delle cifre del periodo?

Terzo caso - numeri decimali periodici misti: scrivi qui di seguito gli esempi e i calcoli che ti servono per trovare la regola; osserva bene quali sono le cifre che compaiono al denominatore e cerca di capire il perché.	Scrivi qui la regola: si può formulare in modo che si basi solo sul numero delle cifre del periodo e dell'antiperiodo?

Curiosità 1. Trova la frazione corrispondente al numero decimale $0,\overline{9}$ e commenta il risultato ottenuto

Curiosità 2. Uguali o diversi?

Del seguente gruppo di numeri decimali, alcuni sono uguali tra loro. Per ognuno di essi sottolinea con lo stesso colore quelli uguali. Ciò significa che la forma decimale di uno stesso numero non è unica.

$$1,\overline{9}\ ;\ 2,\overline{0}\ ;\ 1,5\overline{3}\ ;\ 1,\overline{53}\ ;\ 1,53\overline{3}\ ;\ 1,5\overline{35}\ ;\ 1,3\overline{9}\ ;$$

$$1,33\overline{9}\ ;\ 1,3\overline{99}\ ;\ 1,\overline{4}\ ;\ 1,4\overline{0}\ ;\ 1,53\overline{35}\ ;\ 1,9\overline{9}$$

Attività 3 – Sottrazioni, divisioni, e massimo comun divisore (senza scomposizioni)
Indicazioni per il docente

Tipologia: Attività di scoperta guidata in campo aritmetico. ***Tempo***: **4** ore (indicative)

Obiettivo didattico: cogliere l'importanza della proprietà distribuita per semplificare il problema della ricerca del massimo comun divisore tra due numeri; saper riconoscere il significato della divisone con resto come sottrazione iterata; saper utilizzare in modo consapevole la calcolatrice per effettuare divisioni con resto di numeri "alti". Saper calcolare il massimo comun divisore di numeri (anche molto alti) con l'algoritmo euclideo e l'eventuale utilizzo di una calcolatrice.

Consegna 1
La consegna chiede di riconoscere l'invarianza dell'insieme dei divisori comuni tra due numeri rispetto alla sottrazione, grazie alla proprietà distributiva. Questo costituisce il cuore dell'idea che sta alla base del celebre **algoritmo euclideo** (Euclide, Elementi, libro VII prop. 2): se c'è invarianza dell'insieme dei divisori comuni, c'è invarianza del *massimo* di tali divisori comuni. Calcolare il massimo comun divisiore diventa difficile, ricorrendo alle scomposizioni in fattori, quando i numeri diventano molto alti. Con l'algoritmo euclideo, invece, che sostituisce via via alla coppia di numeri originali, coppie di numeri sempre più piccoli attraverso le sottrazioni iterate del minore dal maggiore, la ricerca del massimo comun divisore diventa quasi un gioco, e si può applicare a numeri molto alti, che con l'altro metodo sarebbero ingestibili.

Consegna 2
La consegna 2 è quella di riconoscere che quando si ha una coppia di numeri di grandezza molto diversa, tale che il più piccolo stia molte volte nel più grande, e ci interessa solo l'ultima differenza della sottrazione iterata del minore dal maggiore, possiamo velocizzare la procedura utilizzando un'altra operazione: la divisione con resto. Questo permetterà di comprendere la natura algoritmica del metodo; esso viene velocizzato con un opportuno uso della calcolatrice e permetterebbe anche la scrittura di un piccolo programma per il calcolatore. Alla pagina http://www.e-santoni.org/progetti/leonardo_06-07/informatica.html se ne può trovare uno.

Consegna 3
La consegna 3 mette in relazione la presente attività con la precedente: quando un numero periodico viene trasformato in frazione, con l'algoritmo euclideo è facile trovare il MCD tra numeratore e denominatore, anche quando si tratta di numeri molto alti, e quindi ridurre la frazione ai minimi termini, come nell'esempio seguente:

$$0{,}2\overline{692307}=\frac{2692307-2}{9999990}=\frac{2692305}{9999990}$$

Impostiamo il MCD(2692305;9999990) con l'algoritmo euclideo; in prima riga, nelle colonne **A** e **B** si trovano i numeri dati; il numero della colonna **B** (il divisore della divisione tra **A** e **B**) viene sottratto quante volte possibile , e infine nella terza colonna, **R**, si trova l'ultima differenza (il resto della divisione). I contenuti delle caselle **B** ed **R** della prima riga vengono "traslati" nelle caselle **A** e **B** della seconda; il processo viene iterato, trovando numeri via via più piccoli, fino ad arrivare a 0; nella casella precedente lo 0 si trova il MCD.

A	B	R
9999990	2692305	1923075
2692305	1923075	769230
1923075	769230	384615
769230	MCD=384615	0

9999990:384615=26; 2692305:384615=7; quindi la frazione cercata è: $\frac{7}{26}$.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 3 – sottrazioni, divisioni, e massimo comun divisore (senza scomposizioni)

Al termine di questa attività vogliamo arrivare a comprendere il legame tra proprietà distributiva e divisori comuni di due numeri, fino a giungere al calcolo del MCD in un modo semplice e veloce, che non richiede di effettuare la ricerca dei divisori comuni attraverso le scomposizioni in fattori. Il metodo è antichissimo e risale al matematico Euclide (IV sec. a.C.). Pur essendo così antico, è strutturato in un modo tale da poter essere facilmente eseguito da un computer.

Consegna 1. Scegli due numeri di due cifre; chiamali A e B: A=.....; B=..... .
Elenca qui sotto i divisori comuni di A e B.

Adesso sottrai il minore dal maggiore e chiama R il resto. Quali sono i divisori comuni tra R,A e B?

E i divisori comuni tra R e il minore tra A e B?

Che cosa noti?

Se resta invariato l'insieme dei divisori, resta invariato l'elemento massimo di tale insieme, cioè il *massimo comun divisore*. Euclide si rese conto che continuando a sottrarre il minore dal maggiore dei due numeri, alla fine avrebbe trovato il loro massimo comun divisore:

	A=numero maggiore	B=numero minore	R=A-B
Numeri dati			
Secondo e terzo numero della riga precedente, il maggiore nella colonna A, il minore nella colonna B			
Secondo e terzo numero della riga precedente, il maggiore nella colonna A, il minore nella colonna B			
..... (se lo spazio non è sufficiente, ricostruisci la tabella su un foglio a parte)			

Consegna 2. Con questa consegna vedremo che il procedimento di iterare la sottrazione del numero minore dal maggiore può diventare molto lento, e può essere notevolmente velocizzato se calcoliamo *a priori* quante volte possiamo sottrarre il numero minore dal maggiore.

Per esempio, se voglio calcolare il MCD tra 100096 e 315, quante volte devo sottrarre 315 da 10096? ..... E qual è l'ultima differenza ottenuta?.....

L'operazione che hai appena eseguito è una **divisione con resto** tra numeri interi. Dunque, per calcolare il MCD tra A e B è sufficiente

- dividere A per B e calcolare il resto R
- sostituire il valore di A con quello di B e il valore di B con quello di R
- ripetere il passo 1

… fino a trovare il numero 0; il numero precedente lo 0 è il MCD. Vedi e completa l'esempio a riportato di fianco.

A	B	R
100096	315	16
315	16	….
…	…	…
…	…	…
…	…	…

Adesso prova tu: calcola il MCD tra le seguenti coppie di numeri:

A	B	R
1057	721	

A	B	R
8715	11921	

A	B	R
123566	47015	

Proviamo adesso ad usare le lettere per dimostrare l'algoritmo euclideo. Basterà dimostrare che l'insieme dei divisori comuni di due numeri a e b, con $a>b$, è uguale all'insieme dei divisori comuni dei due numeri b e $a-b$.

Se d è un divisore comune di due numeri a e b, allora significa che esistono un numero m tale che a=..... e un numero n tale che b=..... .

Ne segue che $a-b$=..... e $a+b$=.....; quindi anche $a-b$ e $a+b$ sono multipli di d, grazie alla proprietà.....

In altri termini: **ogni divisore comune di *a* e *b* è anche divisore della loro differenza e della loro somma**. Dunque:

- ogni divisore comune di a e b è divisore comune di b e della differenza $a-b$
- ogni divisore comune di b e $a-b$ è divisore comune di b e *della somma* $a-b+b$=....

Quindi:

l'insieme dei divisori comuni di *a* e *b* è uguale a quello dei divisori comuni di *b* e *a-b*.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Scheda di riepilogo delle attività 2 e 3 – espressioni coi numeri periodici

Consegna 3. Ora che conosciamo un metodo efficace (ed efficiente) per il calcolo del MCD di numeri, anche molto alti, possiamo

- ridurre ai minimi termini le frazioni che provengono da numeri decimali
- risolvere espressioni con numeri periodici, trasformandole in espressioni con frazioni ridotte ai minimi termini

Riprendiamo i numeri decimali dell'attività 2, e trasformiamoli in frazioni ridotte ai minimi termini (usa un foglio per i calcoli, da allegare alla scheda):

x in forma decimale	$ax=b$ con a e b interi	$M=MCD(a;b)$	$x=\frac{b:M}{a:M}$
$0{,}75$	$100x=75$	25	$x=\frac{3}{4}$
$0{,}175$			
$1{,}0625$			
$0{,}\overline{3}$			
$0{,}\overline{27}$	$99x=27$	9	$x=\frac{3}{11}$
$0{,}1\overline{36}$			
$1{,}08\overline{3}$			
$0{,}20\overline{45}$			
$0{,}20\overline{45}$			
$1{,}958\overline{3}$			

Calcoliamo ora le espressioni della prima consegna dell'attività 2; portando tutti i numeri decimali in frazioni ridotte, tutte le operazioni diventano possibili; puoi usare il retro della scheda per i calcoli o un foglio da allegare alla scheda:

$$0{,}\overline{3}+0{,}\overline{4}\ ;\ 0{,}\overline{3}+0{,}7\ ;\ 1{,}\overline{3}-0{,}\overline{3}\ ;\ 0{,}1\overline{6}-0{,}\overline{16}\ ;$$

$$0{,}\overline{3}\times 0{,}\overline{4}\ ;\ 0{,}\overline{3}+0{,}4\ ;\ 1{,}\overline{2}:0{,}\overline{45}\ ;\ 1{,}\overline{2}-0{,}1\overline{2}\ ;$$

$$2{,}\overline{38}-0{,}\overline{38}\ ;\ 2{,}\overline{38}+0{,}\overline{38}\ ;\ 2{,}\overline{38}\times 0{,}\overline{38}$$

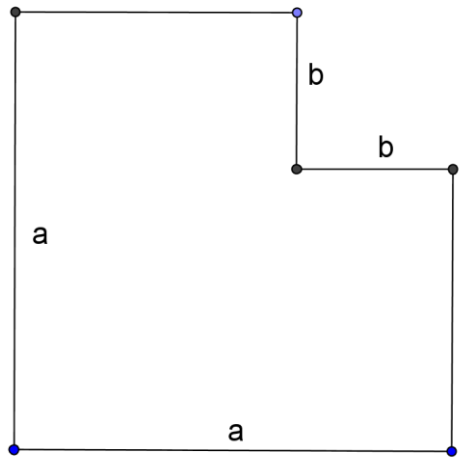
Attività 4 – Ridisegnare i confini

Indicazioni per il docente

Tipologia: Attività di *scoperta guidata* nell'ambito dell'algebra geometrica. ***Tempo***: 4 ore

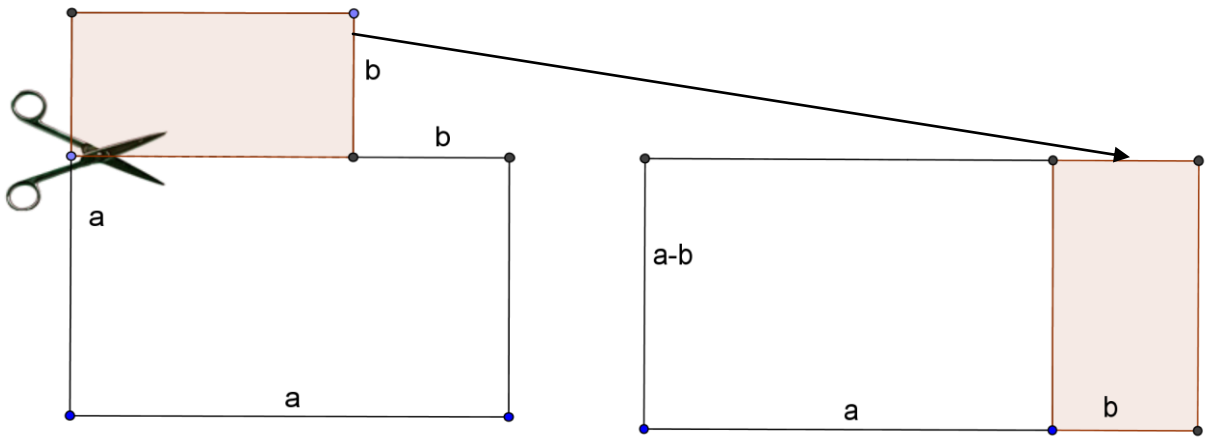
Obiettivo didattico: Saper utilizzare le lettere come strumento per la scoperta di proprietà geometriche di isoperimetria ed equiestensione.

Consegna 1
La consegna chiede di sottrarre da un campo di forma quadrata di lato *a* un campo più piccolo, sempre di forma quadrata, di lato *b*. E' lasciata la libertà ai ragazzi di scegliere configurazioni diverse, tuttavia si chiede di far in modo che non occorra acquistare la rete per la recinzione del nuovo campo. Questa attività mostra, con l'aiuto di semplici polinomi, che diminuendo l'area non è detto che diminuisca anche il perimetro: esso può rimanere costante o può addirittura aumentare. La consegna termina con una discussione in classe che porti alla scelta condivisa di una configurazione "standard", che dovrebbe essere del tipo riprodotto a fianco; in questo caso il perimetro resta costante



Importante. Per non condizionare le scelte possibili della consegna n. 1 è opportuno assegnare la consegna n. 2 su una scheda distinta.

Consegna 2
Si chiede una ulteriore trasformazione che conservi il perimetro (la recinzione), l'area, e tale che si ottenga una forma rettangolare; ci si aspetta un disegno di questo tipo:



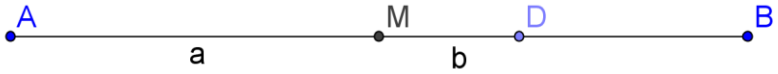
Chiedendo un'espressione per l'area nei due casi, si ottiene il prodotto notevole

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)\ ,$$

che può essere verificato anche algebricamente con la proprietà distributiva.

Nota storica. Il risultato era noto ad Euclide, che negli Elementi, libro V, prop. 2, così si esprime:

"Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta, insieme con il quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta."



Se si indica con *M* il punto medio del segmento *AB*, e si indica con *a* la lunghezza del segmento *AM*, e con *b* quella del segmento che unisce i punti di divisione *M* e *D*, la proposizione viene interpretata dalla seguente uguaglianza algebrica:

$$(a+b)\cdot(a-b)+b^2=a^2$$

che è equivalente a $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.

Si osservi che essendo tutti questi rettangoli isoperimetrici di perimetro $4a$, la proposizione di Euclide dice in modo piuttosto chiaro che tra tutti i rettangoli isoperimetrici, quello di area massima è il quadrato; infatti a tali rettangoli, per arrivare all'area a^2 del quadrato di lato a , manca un quadrato di lato b . Quello che oggi viene considerato un semplice prodotto notevole era per Euclide uno strumento per risolvere un problema di massimo.

Consegna 3 (approfondimento)
E' lasciata alla discrezionalità del docente la scelta di proporre ai ragazzi (o ad alcuni di essi, singolarmente o per gruppi) di confrontarsi direttamente col testo di Euclide. Certamente un'attività di questo tipo costituisce uno stimolo a rafforzare le competenze linguistiche. Occorre comunque qualche cautela sull'uso dei termini: Euclide chiamava "rette" i segmenti, ed usava il termine "uguale" anche nel senso di "equivalente".

E' importante sottolineare l'inopportunità, per la verifica algebrica dell'uguaglianza

$$(a+b)\cdot(a-b)+b^2=a^2$$

di affrontare preliminarmente i cosiddetti "prodotti notevoli". Il loro utilizzo, rendendo meccanico il procedimento, non fanno riflettere sulle proprietà delle operazioni (in particolare la distributiva); è molto più opportuno che i passaggi siano giustificati con quelle, per costruire un percorso coerente di introduzione al linguaggio algebrico.

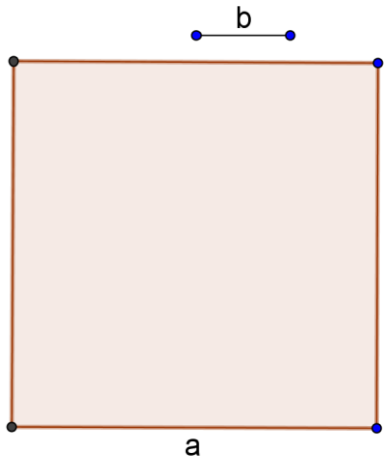
Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 4 – Ridisegnare i confini

Al termine della proposta didattica, vogliamo arrivare a capire, utilizzando le espressioni letterali, che relazione c'è tra area e perimetro di una figura quando questa viene trasformata. Al termine dell'attività giungeremo anche a stabilire una importante uguaglianza algebrica, e a capirne le implicazioni di carattere geometrico.

Consegna 1. "Non mi bastano i soldi per comprare il trattore!"

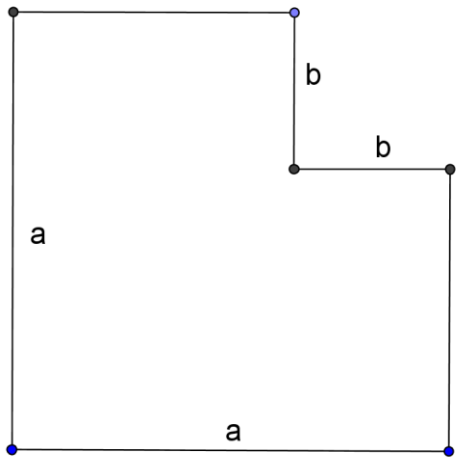
Gianni possiede un campo quadrato piuttosto grande, e fa fatica a lavorarlo col piccolo trattore di cui dispone. Decide di comprare un trattore più grande, ma non ha abbastanza soldi. Un suo vicino, Andrea, è interessato all'acquisto di una porzione del suo campo; purché sia di forma quadrata. Gianni fa le sue valutazioni, e pensa che con un trattore più grande può lavorare meglio anche se gli rimane un terreno più piccolo; quindi pensa di recuperare la spesa del trattore e anche il reddito originario. Gianni e Andrea visitano insieme il campo e cercano insieme la posizione ottimale del pezzo di terra. La situazione è raffigurata con il seguente disegno: con la lettera a è indicata la lunghezza del lato del campo originale; b è il lato del quadrato piccolo da sottrarre; discutendo coi tuoi compagni decidete insieme la posizione ottimale della porzione di campo da vendere; per ciascuna delle possibili posizioni, calcolate il perimetro (Gianni dava per scontato che la rete necessaria per recingere il campo grande fosse sufficiente anche per il campo reso più piccolo... è davvero così?); mettete per iscritto le vostre considerazioni e le motivazioni delle scelte fatte. Usate anche il retro della scheda se necessario.



Motivazioni della scelta della posizione del quadrato piccolo

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Consegna 2. "Il campo ad L proprio non va!" Non so quale posizione avete scelto voi, Gianni ha venduto il piccolo quadrato in modo da lasciare una via di accesso al suo vicino e da far bastare la rete di recinzione. Così ha ottenuto un campo come quello riportato in figura; con il nuovo trattore molti problemi sono risolti, ma la forma ad L... proprio non va, e si chiede se è possibile trasformarlo, in modo da averne uno equivalente, ma di forma rettangolare. Vuoi aiutarlo? La rete di recinzione è ancora sufficiente?

Forma originale	Forma modificata
 area=..... perimetro=.....	area=..... perimetro=.....
Commenti	

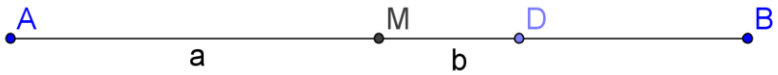
Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Scheda di approfondimento – il linguaggio di Euclide

Consegna 3. Euclide non si è occupato solo di Massimo Comun Divisore; il suo libro più famoso "Gli Elementi" contiene tutti i più importanti risultati di geometria, come il teorema di Pitagora e tanti altri. Ma pur parlando di geometria, spesso Euclide enunciava proprietà di figure che oggi possiamo interpretare con delle uguaglianze tra espressioni letterali; come dire che Euclide con la geometria faceva anche dell'algebra. Vediamone una.

"**Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta, insieme con il quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta.**"

NB. Euclide chiamava rette i segmenti. Con l'aiuto della figura seguente, scrivi un'uguaglianza tra espressioni algebriche che interpreti il testo di Euclide.



Mostra i ragionamenti fatti e l'uguaglianza finale

L'uguaglianza si può anche dimostrare algebricamente, utilizzando le proprietà delle operazioni: mostra come si fa.

Attività 5 (approfondimento) – la probabilità coi polinomi

Indicazioni per il docente

Tipologia: Attività di *collegamento* tra diverse parti della matematica (algebra e probabilità).
Tempo: 4 ore (indicative)

Obiettivo didattico: rendere consapevoli del collegamento tra probabilità e polinomi. In particolare la somma come probabilità dell'unione di eventi incompatibili e il prodotto come intersezione di eventi indipendenti.

NOTA. Sull'utilizzo dei polinomi per il calcolo combinatorio e la probabilità si possono vedere gli articoli di Stefano Sarti (vedi bibliografia).

Consegna 1
La consegna chiede di calcolare la probabilità che, in una famiglia con due figli, si abbiano due maschi, due femmine, oppure un maschio e una femmina. Si possono fare le ipotesi più semplici (equiprobabilità tra i sessi) sia, magari in un secondo momento, accennare agli studi sulla *sex ratio* (relativi alle varie specie, alle varie aree geoegrafiche...) in biologia. In alternativa al classico diagramma ad albero, si può utilizzare lo sviluppo del quadrato di un binomio. Anche in questo caso, come nell'attività precedente, si segnala l'inopportunità di impartire regole sullo sviluppo del quadrato del binomio come prodotto notevole, e come invece anche questa attività possa essere una ulteriore occasione per riflettere sui significati e sulle proprietà delle operazioni: se indichiamo con *F* la probabilità che nasca una femmina, e con *M* la probabilità che nasca un maschio, la somma *M*+*F* rappresenta la probabilità dell'evento "nasce un maschio o una femmina"; il quadrato $(M+F)^2$ racchiude tutti i casi possibili quando ci sono due figli; per lo sviluppo, senza regole sui prodotti notevoli, è sufficiente riflettere sul significato dell'elevamento al quadrato (moltiplicare l'espressione per se stessa) e quindi passare al prodotto $(M+F)\cdot(M+F)$, da sviluppare poi utilizzando la proprietà distributiva. E' interessante qui riflettere sul significato delle espressioni MF ed FM, che corrispondono ad eventi diversi (quindi non è scontato l'uso della proprietà commutativa della moltiplicazione).

Consegna 2
La consegna propone una situazione di vita quotidiana: scegliere se acquistare un ombrello in base alla possibilità che possa piovere in uno almeno di due giorni in cui si è fissata una gita. Le previsioni del tempo prevedono tre alternative: bel tempo, nuvoloso, pioggia; se rappresentiamo le singole probabilità, che si suppongono uguali nei due giorni, con le lettere *B*, *N* e *P*, possiamo rappresentare le probabilità di tutti gli eventi possibili mediante il polinomio

$$(B+N+P)^2$$

sviluppandolo (con le stesse avvertenze della consegna 1, cioè la trasformazione in prodotto e lo sviluppo mediante la proprietà distributiva), la probabilità dell'evento "piove in almeno uno dei due giorni" è data dal polinomio somma di tutti i monomi che contengono almeno una volta la lettera *P*:

$$P^2+2NP+2BP \quad .$$

Le probabilità *B*, *N* e *P*, espresse in percentuale, sono state scelte in modo tale che pur essendo la probabilità giornaliera di pioggia più bassa rispetto alle altre, sale al 51% se calcolata sui due giorni, quindi l'ombrello dovrà essere acquistato.

Si può notare, infine, che il quesito è di natura binaria (gli eventi da considerare sono "piove" e il complementare "non piove"); dunque potrebbe essere risolto con un binomio invece che con un trinomio.

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Attività 5 (approfondimento) – la probabilità coi polinomi

In questa attività vedremo come sia possibile risolvere dei problemi di calcolo delle probabilità con i polinomi. Iniziamo con un richiamo su eventi **indipendenti** ed eventi **incompatibili**.

Se chiamiamo *P* e *Q* le probabilità di due eventi indipendenti, quale espressione rappresenta la probabilità che si verifichino entrambi (intersezione di eventi)? ……

Se chiamiamo ancora *P* e *Q* le probabilità di due eventi, questa volta incompatibili, quale espressione rappresenta la probabilità che se ne verifichi almeno uno (unione di eventi)?.....

Consegna 1. Maschio o femmina? - Una futura mamma è in attesa di due gemelli; non avendo ancora effettuato l'ecografia per determinarne il sesso, si chiede quali sono le varie possibilità. Se *F* è la probabilità dell'evento "nasce una femmina" e *M* è la probabilità dell'evento "nasce un maschio", quale può essere il significato del polinomio $(M+F)^2$?

Il polinomio $(M+F)^2$, in base al significato di potenza, può essere riscritto come prodotto di due fattori, quale?.....

Applicando la proprietà distributiva, si ottengono quattro monomi, ognuno dei quali rappresenta la probabilità di un certo evento; quali sono questi monomi, e a quali eventi corrispondono?

monomio	Evento corrispondente

Supponendo che le probabilità *M* ed F siano entrambe del 50%, è più probabile che nascano due maschi, due femmine, oppure un maschio e una femmina? Scrivi qui sotto le tue considerazioni.

Consegna 2. - Compro o non compro l'ombrello? In questa consegna aiuteremo Gianni, che vuole fare una gita di due giorni per il fine settimana, a capire se è opportuno acquistare un ombrello, che al momento non possiede. Gianni ha deciso di guardare le previsioni meteorologiche, e di comprare l'ombrello se la possibilità di pioggia supera il 50%. Le previsioni, per ogni giorno, distinguono tre casi:

- pioggia (con probabilità *P*)
- nuvoloso (con probabilità *N*)
- bel tempo (con probabilità *B*)

e pare che queste siano le stesse per entrambi i giorni.

Che cosa rappresenta il polinomio $(P+N+B)^2$?

Sviluppandolo il quadrato come hai fatto nella consegna precedente, che espressione ottieni?

….....

Qual è l'espressione che rappresenta la probabilità che in almeno uno dei due giorni venga a piovere?.....

Se le probabilità sono, rispettivamente, *P*=30%; *N*=35%; *B*=35%, Gianni comprerà l'ombrello? Scrivi qui sotto i tuoi ragionamenti e le tue conclusioni.

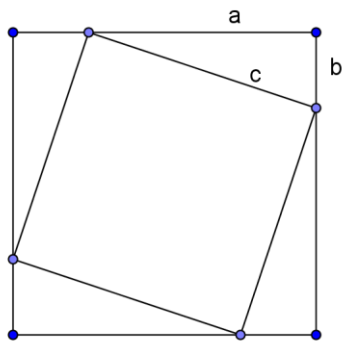
Verifica

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Consegna 1. Esegui le seguenti espressioni, usando le strategie che ritieni più opportune; spiega a fianco quali ragionamenti hai fatto

Calcoli	ragionamenti
$8\times333333333333333\times25$	
$\left(0,\overline{142857}+0,\overline{857142}\right)^{10}$	
$\left[1,1\overline{6}-\left(0,\overline{3}-0,2\right)\right]^{10}$	

Consegna 2. Un quadrato è ottenuto sottraendo da una quadrato più grande quattro triangoli rettangoli uguali, come in figura; chiamando *a* e *b* le lunghezze dei cateti dei triangoli, e *c* la lunghezze delle ipotenuse, si possono trovare due diverse espressioni per l'area del quadrato interno: quali sono?

Figura e conclusioni	Ragionamenti fatti
 prima espressione..... seconda espressione.....	

Consegna 3. Indichiamo con la lettera *T* la probabilità dell'evento "esce testa" al lancio di una moneta, e *C* la probabilità dell'evento "esce croce"; le lasciamo incognite perché forse la moneta è truccata. Se lancio due monete dello stesso tipo, quale espressione rappresenta la probabilità dei seguenti eventi? [Suggerimento: lavora sull'espressione $(T+C)^2$]

Evento	Espressione corrispondente
Esce almeno una testa	
Esce una testa e una croce	
Escono due croci	

Se le monete sono truccate in modo tale che *T=51%*, quale dei tre eventi della tabella è il più probabile? Mostra il procedimento.

Consegna 4 (* più difficile) Uguagliando le due espressioni per l'area del quadrato della consegna 2, e sviluppando alcuni passaggi algebrici, si ottiene l'enunciato di un famoso teorema: quale? Scrivi qui sotto il tuo ragionamento e i tuoi calcoli

Attività di Recupero

Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Consegna 1. Scriviamo il numero periodico $0,\overline{68}$ in vari modi:

Con due cifre decimali	Con tre cifre decimali	Con quattro cifre decimali	Con cinque cifre decimali	Con sei cifre decimali
$0,\overline{68}$	$0,6\overline{86}$	……	……	……

Moltiplichiamo questo numero per 10, 100, 1000...

x	$10x$	$100x$	$1000x$	$10000x$
$0,\overline{68}$	$6,\overline{86}$	……	……	……

I numeri x e $10x$ hanno la stessa parte decimale? Spiega perché.

Ora completa la seguente tabella:

L'espressione	Corrisponde alla sottrazione...	Si può eseguire?	Se sì, qual è il risultato?	Se no, perché?
$10x-x$	$6,\overline{86}-0,\overline{68}$			
$100x-x$				
$1000x-x$				
$1000x-10x$				

Risolvi ora le seguenti equazioni:

equazione	Forma canonica $ax=b$	$x=\frac{b}{a}$	Riduzione ai minimi termini
$10x-x=18$	$9x=18$	$x=\frac{18}{9}$	$x=2$
$100x-x=77$			
$1000x-10x=45$			
$1000x-x=370$			

Consegna 2. Delle seguenti coppie di numeri, sottrai ripetutamente il minore dal maggiore, finché puoi: il procedimento finisce sempre o qualche volta può andare avanti all'infinito? Spiega perché.

Maggiore	Minore	Differenza	Descrivi cosa succede
120	50	70	
70	50	….	
...	...	...	
...	...	...	
...	...	...	
….	…	...	

Adesso prova senza la guida

Maggiore	Minore	Differenza	Descrivi cosa succede
84	15		

Il matematico greco Euclide sapeva che in questo modo si poteva trovare il massimo comun divisore tra i due numeri dati; verifichiamolo nei due esempi appena visti.

I divisori di 120 sono: ……

I divisori di 50 sono: .....

I divisori comuni di 120 e 50 sono: ……

e il massimo di tali divisori comuni è ……;

compare questo numero nella prima tabella? …… ; come si distingue dagli altri? ……

……

I divisori di 84 sono: ……

I divisori di 15 sono: .....

I divisori comuni di 84 e 15 sono: ……

e il massimo di tali divisori comuni è ……;

compare questo numero nella seconda tabella? …… ; come si distingue dagli altri? ……

……

Esempi di Prove internazionali

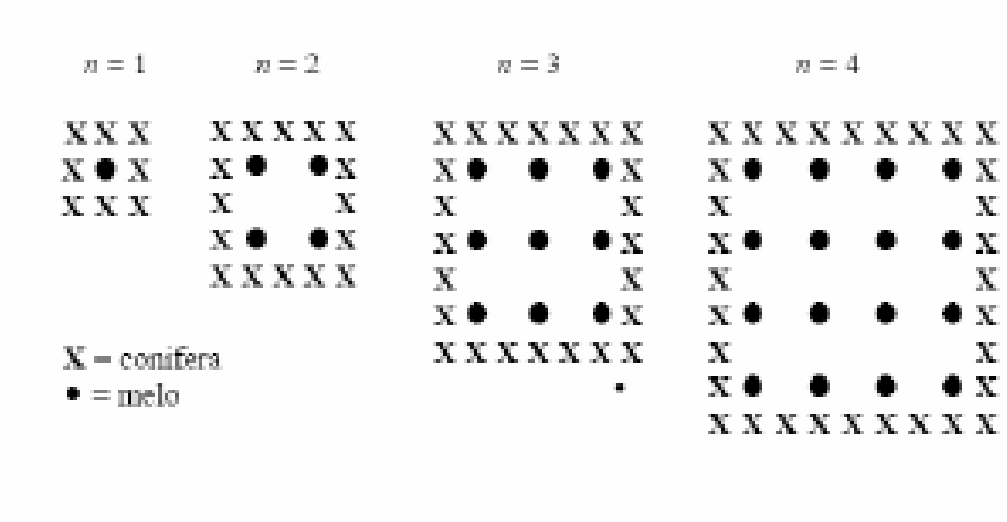
Scheda per lo studente		
Cognome	***Nome***	***Data***

Prova OCSE-PISA anno 2000 (idea chiave: cambiamento e relazioni)

MELI

Un agricoltore pianta dei meli in modo da formare un quadrato. Per proteggere questi alberi dal vento, pianta delle conifere intorno al frutteto.

Qui sotto puoi vedere uno schema che rappresenta la disposizione dei meli e delle conifere per un numero qualsiasi (n) di filari di meli:



Domanda 2: MELI

M136Q02-00 11 12 13 14 15 99

Con le due formule seguenti puoi calcolare il numero di meli e il numero di conifere della disposizione descritta prima:

Numero di meli = n^2

Numero di conifere = $8n$

dove n è il numero di filari di meli.

Vi è un valore di n per cui il numero di meli è uguale al numero di conifere. Trova il valore di n e mostra il metodo che hai usato per calcolarlo.

Domanda 3: MELI

M136Q03-01 02 11 21 99

Supponi che l'agricoltore voglia ingrandire il frutteto con molti filari di alberi. Man mano che l'agricoltore ingrandisce il frutteto, che cosa aumenta più velocemente: il numero di meli o il numero di conifere? Spiega come hai trovato la risposta.

.....

.....

.....

(Quesito "MELI" tratto da **Compendio Prove PISA – Insegnanti**, pp. 168-175; disponibile su http://www.invalsi.it/download/pdf/Compendio-definitivo-22-10-08.pdf)